TD 09 – Limite d'une suite

Exercice 1 – Limites de référence et opérations (sans FI). Étudier les limites des suites suivantes.

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^3 + 2n - 9$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -1 + \frac{1}{n^3} - \frac{6}{n}$

3) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3 - e^{2n}}$

4) $\forall n \geqslant 2,\ u_n = 2^n \left(-1 + \frac{3}{\sqrt{\ln(n)}}\right)$

5) $\forall n \geqslant 2,\ u_n = \frac{3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{(\ln n)^2 \times 5^n}$

6) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n^{-3} + n^5 + 6 + e^{-n}$

7) $\forall n \geqslant 2,\ u_n = \frac{2 + \frac{1}{\ln n}}{-1 + \frac{1}{n}}$

8) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -n^3 - 3n^2 - 2n + 1$

9) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n} - 1$

10) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{-1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{e^{-n} + \frac{1}{n^2}}$

1. $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

2. $\lim_{n \to +\infty} u_n = -1 = (-1+0+0)$

3. $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \left(= \frac{1}{\infty}\right)$

4. $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty \left(= +\infty(-1+0)\right)$

5. $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 = \left(\frac{3+0}{\infty \times \infty}\right)$

6. $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \ (= 0 + \infty + \infty + 0)$

7. $\lim_{n \to +\infty} u_n = -2 \left(= \frac{2+0}{-1+0}\right)$

8. $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

9. $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

10. $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty \left(= \frac{-1+0}{0^+ + 0^+}\right)$

Exercice 2 – Limites de référence et opérations (avec FI). Étudier les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ suivantes.

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2n+1}{1-4n}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{3^n}{n^2}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\ln(n)}{n^2} + n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$

4) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\ln(3n)}{\sqrt{n}}$

5) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n+(-1)^n}{2+e^{-n}\ln(n)}$

6) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$

7) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n^2+2} - n$

8) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}\ (1 < b < a)$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_n = \frac{2n(1+\frac{1}{2n})}{-4n(-\frac{1}{4n}+1)} = -\frac{1}{2} \times \frac{1+\frac{1}{2n}}{\frac{1}{4n}-1}$
FI ∞/∞

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\frac{1}{2}$ $\left(= -\frac{1}{2}\,\frac{1+0}{0+1}\right)$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_n = \frac{3^n}{n^2}$
FI ∞/∞

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (" 3^n gagne sur n^2 ")

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$
FI ∞/∞ pour le 1er terme
$0\times\infty$ pour le 2ième terme

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 6$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_n = \frac{\ln 3}{\sqrt{n}} + \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$
FI ∞/∞

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ (" $\sqrt{n}$ gagne sur $\ln n$ ")

5) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$\lim_{n\to+\infty} n+(-1)^n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\ln(n) = 0$
FI $0\times\infty$ au dénominateur

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

6) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_n = \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$
FI ∞/∞

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ (" $n^{3/2}$ gagne sur $(\ln n)^2$ ")

7) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_n = \left(\sqrt{n^2+2} - n\right)\frac{\sqrt{n^2+2}+n}{\sqrt{n^2+2}+n}$
FI $+\infty-\infty$
$= \frac{n^2+2-n^2}{\sqrt{n^2+2}+n}$
$= \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

8) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_n = \frac{a^n \times \left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{a^n \times \left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} = \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$
FI ∞/∞ (et $+\infty-\infty$ au num)

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ $\left(= \frac{1-0}{1+0}\right)$

Exercice 3 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n+1}{3-u_n}.$$

1. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.
   (a) Expliquer pourquoi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (b) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, au vu de la Question 1, que doit vérifier la limite ℓ ?
   (c) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
   (d) En déduire l'expression explicite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (e) En déduire l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (f) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Est-ce cohérent avec le résultat de la Question 2(b) ?

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}(n)$: " $0<u_n<1$ ".
- Initialisation : Mque $\mathcal{P}(1)$ est vraie, c'est-à-dire que $0<u_1<1$.
  On a $u_1 = \frac{u_0+1}{3-u_0} = \frac{0+1}{3-0} = \frac{1}{3}$
  Donc $u_1 = \frac{1}{3} \in]0,1[$
  Donc $\mathcal{P}(1)$ vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c-à-d que $0<u_n<1$.
  Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c-à-d que $0<u_{n+1}<1$.
  On sait que $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{3-u_n}$.
  On* $0<u_n<1$ donc   * par hyp de rec
  $1 < u_n+1 < 2$
  et $2 < 3-u_n < 3$
  donc $\frac{1}{3} < \frac{1}{3-u_n} < \frac{1}{2}$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$
  donc $\frac{1}{3}\times 1 < \frac{u_n+1}{3-u_n} < \frac{1}{2}\times 2$
  c-à-d $\frac{1}{3} < u_{n+1} < 1$
  donc $0 < u_{n+1} < 1$
  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0<u_n<1$.

2. a) D'après la question 1, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \neq 1$
et on a aussi $u_0 \neq 1$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n existe.

b) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0<u_n<1$
si $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors
$0 \leq \ell \leq 1$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-1} - \frac{1}{u_n-1}$$
$$= \frac{1}{\frac{u_n+1}{3-u_n}-1} - \frac{1}{u_n-1}$$
$$= \frac{3-u_n}{u_n+1-(3-u_n)} - \frac{1}{u_n-1}$$
$$= \frac{3-u_n}{-2+2u_n} - \frac{1}{u_n-1}$$
$$= \frac{3-u_n-2}{2(u_n-1)}$$
$$= \frac{1-u_n}{2(u_n-1)}$$
$$= -\frac{1}{2}$$

Donc $(v_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$.

d) Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = v_0 - \frac{n}{2}$$
$$= -1 - \frac{n}{2}$$
$$= -\frac{n+2}{2}$$

e) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$u_n = \frac{1}{v_n} + 1$$
$$= -\frac{2}{n+2} + 1$$

f) Donc la suite $(u_n)_n$ cv et
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

Exercice 4 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = -2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 6$.
2. Montrer que cette suite est croissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie.
4. Déterminer la valeur de cette limite.
5. Déterminer le terme général de la suite. Retrouver le résultat de la question précédente.

1. Récurrence (...)

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 3 - u_n$$
$$= -\frac{1}{2}u_n + 3$$
$$\geqslant -\frac{1}{2}\times 6 + 3$$
$$\geqslant 0$$

en utilisant la question 1

Donc la suite est croissante.

3. La suite $(u_n)_n$ est :
   * majorée (par 6)
   * croissante

   Donc par théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_n$ admet une limite finie que l'on note ℓ.

4. D'après l'énoncé,
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$
Donc en passant à la limite, on obtient
$$\ell = \frac{1}{2}\ell + 3$$
c-a-d $\frac{1}{2}\ell = 3$

c-a-d $\ell = 6$.

Donc la suite $(u_n)_n$ cv vers 6.

5. La suite $(u_n)_n$ est arithmético-géométrique.
En déroulant la méthode, on obtient
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = -8\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$$
Donc la suite $(u_n)_n$ cv vers 6 car
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \text{car} \quad -1 < \frac{1}{2} < 1$$

Exercice 5 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_1 = \frac{2}{5} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 25.$$

En reprenant la méthode de l'exercice précédent, démontrer de deux manières différentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel à déterminer.

Exercice 6 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^4.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. En déduire qu'il existe seulement que deux comportements possibles pour la convergence de la suite.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
4. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$, alors nécessairement $\ell = 0$. *(On pourra utiliser la relation de récurrence de la suite.)*
5. À l'aide des deux questions précédentes, en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$.
6. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$u_{n+1} - u_n = u_n^4 \geqslant 0$
Donc la suite $(u_n)_n$ est croissante.

2. Comme la suite $(u_n)_n$ est croissante,
   - soit $(u_n)_n$ est majoré et la suite converge vers un nombre réel ℓ
   - soit la suite diverge vers $+\infty$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$: " $u_n \geqslant 1$ ".
   - Initialisation : Mque $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_0 \geqslant 1$
     On a $u_0 \geqslant 1$
     Donc $\mathcal{P}(0)$ vraie.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.
     On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c-à-d que $u_n \geqslant 1$
     Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c-à-d que $u_{n+1} \geqslant 1$
     On a $u_{n+1} = u_n + u_n^4$.
     Or $u_n \geqslant 1$ par hyp de recurrence
     donc $u_n^4 \geqslant 1$ car $x \mapsto x^4$ croissante sur $\mathbb{R}^+$
     donc $u_n + u_n^4 \geqslant 2$
     donc $u_{n+1} \geqslant 2 \geqslant 1$.
     Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : Par principe de récurrence,
     pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

4. Si la suite $(u_n)_n$ converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$,
comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^4$
en passant à la limite, on obtiendrait $\ell = \ell + \ell^4$ et donc $\ell = 0$.

5. Si la suite $(u_n)_n$ converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$,
   - d'après la question 4, nécessairement $\ell = 0$
   - d'après la question 3, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$ et donc en passant à la limite, $\ell \geqslant 1$

   Ceci est contradictoire. Donc $(u_n)_n$ ne peut pas converger vers un $\ell \in \mathbb{R}$.

6. En utilisant les questions 2 et 5, on obtient que nécessairement, la suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 7 – Théorème d'encadrement. Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ la suite définie par

$$\forall n \geqslant 2, \qquad u_n = \frac{e^n}{n!}$$

1. Démontrer que,
$$\forall n \geqslant 2, \qquad u_{n+1} \leqslant \frac{e}{3}u_n.$$
2. En déduire que,
$$\forall n \geqslant 2, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{e}{3}\right)^{n-2} u_2.$$
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 0.

1. Soit $n \geqslant 2$. On a :

$$u_{n+1} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e}{n+1} \times \frac{e^n}{n!} = \frac{e}{n+1} \times u_n.$$

Or $n \geqslant 2$
donc $n+1 \geqslant 3$
donc $\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{3}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$
donc $\frac{e}{n+1} \leqslant \frac{e}{3}$ car $e>0$

Finalement,
$\forall n \geqslant 2, \ u_{n+1} \leqslant \frac{e}{3} u_n$

2. Par définition de la suite, on a déjà
$\forall n \geqslant 2, \ u_n = \frac{e^n}{n!} \geqslant 0.$

Démontrons par récurrence que
$\forall n \geqslant 2, \quad \mathcal{P}(n) :$ " $u_n \leqslant \left(\frac{e}{3}\right)^{n-2} u_2$ "

•• Initialisation : On a
$\left(\frac{e}{3}\right)^{2-2} u_2 = \left(\frac{e}{3}\right)^{0} u_2 = 1 \times u_2 = u_2 \geqslant u_2$
Donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

•• Hérédité :
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \geqslant 2$,
c-a-d $u_n \leqslant \left(\frac{e}{3}\right)^{n-2} u_2$
On veut mque $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie
c-a-d $u_{n+1} \leqslant \left(\frac{e}{3}\right)^{n-1} u_2.$

On a
$u_{n+1} \leqslant \frac{e}{3} u_n$ d'après la q° 1
$\leqslant \frac{e}{3} \times \left(\frac{e}{3}\right)^{n-2} u_2$ par hyp de rec
$\leqslant \left(\frac{e}{3}\right)^{n-1} u_2$ (car $x^a \times x^b = x^{a+b}$)

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

•• Conclusion (...)

3. D'après la question 2,
$\forall n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{e}{3}\right)^{n-2} u_2.$

Or • la suite $(0)_{n\geqslant 2}$ cv vers 0
• la suite $\left(\left(\frac{e}{3}\right)^{n-2} u_2\right)$ cv vers 0
car suite géométrique de raison $-1 < q = \frac{e}{3} < 1$ ($e \simeq 2.7$)

Donc par théorème d'encadrement, la suite $(u_n)_n$ admet une limite finie qui vaut 0.

Exercice 8 – Théorème d'encadrement. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{1}{n^2}\left(\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \cdots + \lfloor nx\rfloor\right)$$

On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la partie entière de x, notée $\lfloor x\rfloor$, est l'unique entier vérifiant

$$x - 1 < \lfloor x\rfloor \leqslant x$$

1. Démontrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad x(1+2+\cdots+n) - n \leqslant \lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \cdots + \lfloor nx\rfloor \leqslant x(1+2+\cdots+n)$$

2. En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{xn(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{xn(n+1)}{2n^2}$$

3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel à déterminer.

1.
2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$
$$2x-1 < \lfloor 2x \rfloor \leqslant 2x$$
$$3x-1 < \lfloor 3x \rfloor \leqslant 3x$$
$$(\ldots)$$
$$nx-1 \leqslant \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$$

Donc en sommant toutes ces inégalités, on obtient

$$\underbrace{x+2x+\cdots+nx-1\cdots-1}_{\substack{= x(1+2+\cdots+n) - n \\ = x\frac{n(n+1)}{2} - n}} \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor \leqslant \underbrace{x+2x+\cdots+nx}_{\substack{= x(1+2+\cdots+n) \\ = x\frac{n(n+1)}{2}}}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n^2}\left(\frac{xn(n+1)}{2} - n\right) \leqslant u_n \leqslant \frac{xn(n+1)}{2n^2}$$

c-a-d $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{x}{2}\times\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Or les deux suites $\left(\frac{x}{2}(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{x}{2}(1+\frac{1}{n})\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{x}{2}$. Donc par théorème d'encadrement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie qui vaut $\frac{x}{2}$.

Exercice 9 – Encadrement avec la valeur absolue. Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers 0 où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{(-1)^n+2}{n} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{(-1)^n(1+n)}{n^2}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} |u_n| &= \frac{|(-1)^n+2|}{|n|} \\ &= \frac{|(-1)^n+2|}{n} \quad \text{car } n>0 \\ &\leq \frac{|(-1)^n|+|2|}{n} \quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \frac{1+2}{n} \\ &\leq \frac{3}{n} \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n| \leq \frac{3}{n}$.

Or la suite $\left(\frac{3}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv vers 0.

Donc par encadrement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv vers 0.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} |v_n| &= \frac{|(-1)^n| \times |1+n|}{|n^2|} \\ &= \frac{|1+n|}{n^2} \\ &\leq \frac{|1|+|n|}{n^2} \\ &\leq \frac{1+n}{n^2} \\ &\leq \frac{1}{n^2}+\frac{1}{n} \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |v_n| \leq \frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}$

Or la suite $\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv vers 0.

Donc par encadrement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cv vers 0.

Exercice 10 – Suites adjacentes. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données ci-dessous forment des couples de suites adjacentes. En déduire que les deux suites sont convergentes.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

1. * la suite $(u_n)_n$ est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$

* la suite $(v_n)_n$ est décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1}-v_n = u_{n+1}+\frac{1}{n+1}-\left(u_n+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{n-(n+1)}{n(n+1)}$

$$= \frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2} \leq 0$$

* la suite $(u_n-v_n)_n$ cv vers 0 car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n-u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc les deux suites sont adjacentes
donc les deux suites cv (vers une même limite)

2. * la suite $(u_n)_n$ est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k+n+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}$

$$= \sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{k+n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}$$

changement d'indice $j=k+1$ dans la 1ière somme

$$= \frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$$

$$= \frac{2n+2-(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \geq 0$$

* la suite $(v_n)_n$ est décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1}-v_n = \sum_{k=n+1}^{2n+2}\frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}$

$$= \frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n}$$

$$= \frac{(2n+1)n+(2n+2)n-(2n+1)(2n+2)}{(2n+2)(2n+1)n}$$

$$= \frac{\cancel{2n^2}+n+\cancel{2n^2}+2n-\cancel{4n^2}-4n-2n-2}{(2n+2)(2n+1)n}$$

$$= \frac{-3n-2}{(2n+2)(2n+1)n}$$

$$\leq 0$$

* la suite $(u_n-v_n)_n$ cv vers 0 car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n-u_n = \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}$

$$= \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$$

chgt d'indice $j=k+n$

$$= \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

Donc les deux suites sont adjacentes
donc les deux suites cv (vers une même limite)

Exercice 11 – Considérons la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Démontrer que,
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}).$$
2. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = 2\frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$
$$= 2\frac{(\sqrt{k+1})^2-(\sqrt{k})^2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$
$$= 2\frac{k+1-k}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

Or $k+1 \geqslant k$

donc $\sqrt{k+1} \geqslant \sqrt{k}$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0,+\infty[$

donc $\sqrt{k+1}+\sqrt{k} \geqslant 2\sqrt{k}$

donc $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$ car $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$

Finalement,
$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$$

2. D'après la question précédente,
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

Donc en sommant, on obtient
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

c-a-d
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \geqslant 2(\sqrt{n+1}-1)$$
en reconnaissant une somme telescopique à droite

Or la suite $(\sqrt{n+1}-1)_n$ diverge vers $+\infty$.
Donc par minoration, la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.