TD 10 – Notion d'Ensemble

Exercice 1 – Appartenance ou non-appartenance. Dans les phrases suivantes, remplacer les ____ par le symbole correspondant entre $\in$ et $\notin$.

1 ____ $\{a^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$	$x \mapsto \exp(x)$ ____ $\mathbb{R}[x]$
-2 ____ $\{a^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$	$x \mapsto x^3+1$ ____ $\mathbb{R}_2[x]$
$(1,2)$ ____ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=1\}$	$x \mapsto 2x^5+x$ ____ $\mathbb{R}_5[x]$
$(-1,-1)$ ____ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=\frac{1}{x}\}$	$x \mapsto x^2+1$ ____ $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ paire }\}$
$(0,2)$ ____ $\{(t,2+t) \mid t \in \mathbb{R}\}$	$x \mapsto x^2+2x+1$ ____ $\{f^2 \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$
$(0,2,3)$ ____ $\{(a,a+b,0) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$	$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ____ $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \mid \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0\}$
$(1,5,-1)$ ____ $\{(a,a+b,-a) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$	$(2n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ ____ $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n+2\}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ____ $\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(M) > 0\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ____ $\{A^{-1} \mid A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ inversible}\}$

Exercice 2 – Inclusion. Démontrer les inclusions suivantes.

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x+y=1\} \subset \{(t,1-2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$\{(1+a,b-1,-a-b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} \subset \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$$

$$\{f : x \mapsto ax+b \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\} \subset \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0\}$$

$$\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N}, -c \leqslant nu_n \leqslant c\} \subset \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \lim_{n\to+\infty} u_n = 0\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^4 = 4x-1\} \subset [0,+\infty[$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-y=2\} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (3x+y+2)(x+2y+4) \geqslant 0\}$$

Exercice 3 – Non-Inclusion. Démontrer les non-inclusions suivantes.

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\} \not\subset \{(t,t^2) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$\{(a,-a,a) \mid a \in \mathbb{R}\} \not\subset \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$$

$$\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid u_0 = 0\} \not\subset \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \lim_{n\to+\infty} u_n = 0\}$$

$$\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique }\} \not\subset \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \lim_{n\to+\infty} u_n = 0\}$$

$$\{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = 0_{2,2}\} \not\subset \{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ inversible}\}$$

$$\{A^2 \mid A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})\} \not\subset \{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ inversible}\}$$

Exercice 4 – Doucle inclusion. Démontrer l'égalité $A = B$ par double inclusion lorsque

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 4x - y = 1\}$ et $B = \{(t+1, 4t+3) | t \in \mathbb{R}\}$
2. $A = \left\{(a-b, b, -2a+3b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ et $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\right\}$
3. $A = [a,b]$ et $B = \{ta + (1-t)b | t \in [0,1]\}$ (pour a, b deux réels)
4. $A = [0,1]$ et $B = \{x \in \mathbb{R}_+ | x^2 \leqslant x\}$

Exercice 5 – Égalité par équivalence. Démontrer l'égalité $A = B$ grâce à un raisonnement par équivalence.

1. $A = \{\alpha \in \mathbb{R} | P(\alpha) = 0\}$ et $B = \{1, 2, -\frac{1}{2}\}$ où
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = (x-1)(x-2)(2x+1)$$
2. $A = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) | M^T = M\}$ et $B = \{\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ avec
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
3. $A = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} | (u_n)$ géom.$, u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+3} + 3u_{n+2} - u_n = 0\}$ et $B = \{(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ avec
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ v_n = (-1)^n \qquad \text{avec} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Exercice 6 – Ensemble des parties. Déterminer $\mathscr{P}(E)$ lorsque

a. $E = \{1,2\}$ b. $E = \{a\}$ c. $E = \{2,4,6\}$

Exercice 7 – Opérations sur les parties. Déterminer les ensembles suivants
$$A \cup B, \qquad A \cap B, \qquad A \setminus B, \qquad B \setminus A, \qquad \overline{A} \quad \text{et} \quad \overline{B}$$
lorsque

1. $A =]-\infty, 3[$ et $B = [0,5]$ (dans l'espace ambiant $E = \mathbb{R}$)
2. $A =]-1, +\infty[$ et $B = [2, +\infty[$ (dans l'espace ambiant $E = \mathbb{R}$)
3. $A = \{0,1\}$ et $B = \{1,2\}$ (dans l'espace ambiant $E = \{0,1,2,3\}$)

Exercice 8 – Intersection & Union. Déterminer les ensembles suivants en raisonnant par équivalence.
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 2z = 0\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 0\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} | x^2 - 4x + 2 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} | x^2 = 1\}$$
$$\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) | M^T = M\} \cap \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) | M^T = -M\}$$
$$\mathbb{R}_2[x] \cap \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(0) = 0\}$$

Exercice 9 – Intersection. Déterminer l'ensemble suivant
$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 2\right\} \cap \left\{(a+b, 2b, 2a-3b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Exercice 10 – Produit cartésien. Déterminer les produits cartésiens suivants
$$\{0,1\} \times \{0,1\} \qquad \{a,b\} \times \{c,d\} \qquad \{0\} \times \{1,2\} \times \{3,4\}$$

Exercice 11 – Vrai/Faux. Les assertions suivantes sont-elles vérifiées pour toutes parties A, B, C d'un ensemble Ω ? *On pourra s'aider de dessins pour répondre à ces questions.*

1. $A \cap B \subset B$
2. $A \cup B \subset B$
3. $(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$
4. $(B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = \Omega$
5. $(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
7. $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
8. $A \cap \overline{B} \subset A \cup B$
9. $\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
10. $(A \cap \overline{B}) \cup B = A \cup B$