# DS 2

*Vendredi 29 novembre 2024, 13h30 - 16h30*

---

*Les règles à respecter sont les suivantes.*

- *Les candidat·e·s sont invité·e·s à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible leurs résultats.* ***Un point sera enlevé sur la copie si les résultats ne sont pas encadrés.***
- *Aucun document n'est autorisé.* ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***
- *Pour augmenter la* ***lisibilité*** *des calculs, dans la mesure du possible, les égalités successives seront présentées en colonne (et non pas en ligne) avec les différents symboles = bien alignés.*

---

**Exercice 1 –** *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. (DS1) Pour les trois fonctions suivantes, donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction.
$$f : x \mapsto 3x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \qquad g : x \mapsto \sqrt{2x+3} \qquad h : x \mapsto \ln(x-3)$$
2. (DM1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par
$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}.$$
Démontrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,2]$.
3. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n$$
4. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_0 = -1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 1$$
5. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{3}$$
6. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_0 = \frac{1}{4}, \qquad u_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$$
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.
$$\text{a. } S_1 = \sum_{k=1}^{n} (2k-3) \qquad \text{b. } S_2 = \sum_{k=1}^{n} 2^{k+1} \qquad \text{c. } S_3 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
8. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et lorsque c'est le cas, donner leur inverse.
$$\text{a. } M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b. } M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{c. } M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
9. Déterminer la limite des suites suivantes.
$$\text{a. } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n} + \exp(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{b. } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+n} \qquad \text{c. } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\exp(n)+n^2}{n^2+\ln(n)}$$

**Exercice 2 – Étude d'une suite.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$$

1. Calculer $u_1$.
2. Écrire un programme Python qui calcule et affiche les 11 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (c'est-à-dire de $u_0$ à $u_{10}$).
3. Recopier et compléter le programme suivant qui permet de créer une fonction, appelée `listesuite`, qui prend en argument un entier `n` et qui renvoie une liste contenant tous les termes de la suite (depuis $u_0$) jusqu'au terme de rang `n` (jusqu'à $u_n$).

```
#On définit une fonction
.......................................
    #On introduit une liste vide
    .........................
    #On créé une variable appelée u
    #qui contient la valeur de u0 au départ
    ...............
    #On ajoute la valeur de u0 à la liste
    ................
    for k in range(...., .....):
        #On calcule le terme d'après de la suite
        #à partir du terme précédent
        .......................
        #et on l'ajoute à la liste
        .......................
    #On renvoie la liste complète
    ........................
```

4. On suppose qu'une fois le programme précédent complété de manière adéquate, la fonction `listesuite` évaluée en 5 renvoie la liste suivante.

```
[1.5, 1.25, 1.0625, 1.00390625,
1.0000152587890625, 1.0000000002328306]
```

   À partir de ce résultat, que peut-on conjecturer sur le caractère borné, la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?
5. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$.
   (b) À l'aide de la question 5a, montrer par récurrence que,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in [1,2]$$
6. (a) Montrer que,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$$
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
7. (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie que l'on notera $\ell$.
   (b) Donner une équation vérifiée par la limite $\ell$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Donner un encadrement de la limite $\ell$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Montrer que la limite $\ell$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie également
   $$\ell \leqslant \frac{3}{2}$$
   (e) En déduire la valeur de la limite $\ell$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice 3 – Adapté d'ECRICOME 2024.** On considère la matrice $M$ carrée de taille $3\times 3$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 0, et dont tous les autres coefficients sont égaux à 1 :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $I_3$ la matrice identité d'ordre 3.

### Partie 1 - Inversibilité de $M$

1. Montrer par le calcul que $(M+I_3)^2 = 3(M+I_3)$.
2. Développer les expressions littérales $(M+I_3)^2$ et $3(M+I_3)$.
3. En déduire que
$$M^2 - M - 2I_3 = 0_{3,3}.$$
4. En déduire que la matrice $M$ est inversible et déterminer son inverse.

### Partie 2 - Calcul des puissances de $M$

On considère la matrice
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Soient
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$
Montrer que l'équation $PX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ admet une unique solution (que l'on explicitera en fonction de $a$, $b$ et $c$).
6. En déduire que $P$ est inversible et que
$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
7. On pose $D = P^{-1}MP$. Calculer la matrice $D$ et montrer que $D$ est une matrice diagonale.
8. Justifier précisément que $M = PDP^{-1}$.
9. Montrer par récurrence que,
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad M^k = PD^kP^{-1}$$
10. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'expression de $D^k$.
11. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'expression de $M^k$.
12. On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe deux réels $a_k$ et $b_k$ tels que
$$M^k = a_kM + b_kI_3.$$
Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'expression de $a_k$ et $b_k$.
13. (Question ouverte) La formule de la question 12 peut-elle être étendue à $k = -1$ ?
14. (Question ouverte) À la question 3, on a montré que le polynôme $x \mapsto x^2 - x - 2$ était un polynôme annulateur de la matrice $M$. Quel lien peut-on faire entre ce polynôme et les coefficients de la matrice diagonale $D$ trouvés à la question 7 ?