

INDICATIONS POUR AUTO-CORRECTION – DS 2

Vendredi 29 novembre 2024, 13h30 - 16h30

Exercice 1 – Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. (DS1) Pour les trois fonctions suivantes, donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction.

$$f : x \mapsto 3x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad g : x \mapsto \sqrt{2x+3} \quad h : x \mapsto \ln(x-3)$$

→ Voir Correction DS1

2. (DM1) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}.$$

Démontrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 2]$. → Voir Correction DM1

3. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n$$

→ Voir Chapitre 7 - Définition 4.4 - Exemple 4.5

4. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = -1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 1$$

→ Voir Chapitre 7 - Définition 4.1 - Exemple 4.2

5. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{3}$$

→ Voir Chapitre 7 - Définition 4.6 - Exemple 4.7

6. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \frac{1}{4}, \quad u_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$$

→ Voir Chapitre 7 - Proposition 4.9 - Exemples 4.10 & 4.11

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

a. $S_1 = \sum_{k=1}^n (2k-3) \rightarrow$ Voir Chapitre 6 - Exemples 1.13 & 1.14

b. $S_2 = \sum_{k=1}^n 2^{k+1} \rightarrow$ Voir Chapitre 6 - Exemple 1.11

c. $S_3 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \rightarrow$ Voir Chapitre 6 - Exemple 1.16

8. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et lorsque c'est le cas, donner leur inverse. → Voir Chapitre 8 - Proposition 3.8 - Exemples 3.9, 3.13 & 3.10

a. $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b. $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ c. $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

9. Déterminer la limite des suites suivantes.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n} + \exp(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow$ Voir Chapitre 9 - Exemple 2.1
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+n} \rightarrow$ Voir Chapitre 9 - Exemple 2.5 (4ième ligne)
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\exp(n)+n^2}{n^2+\ln(n)} \rightarrow$ Voir Chapitre 9 - Exemple 2.5 (5ième ligne)

Exercice 2 – Étude d’une suite. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$$

- Calculer u_1 .
- Écrire un programme Python qui calcule et affiche les 11 premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (c’est-à-dire de u_0 à u_{10}). \rightarrow Voir TP 02 - Exercice 2, Question 2
- Recopier et compléter le programme suivant qui permet de créer une fonction, appelée `listesuite`, qui prend en argument un entier n et qui renvoie une liste contenant tous les termes de la suite (depuis u_0 jusqu’au terme de rang n (jusqu’à u_n). \rightarrow Voir TP 02 - Exercice 2, Question 6

```

1 #On définit une fonction
2 .....
3     #On introduit une liste vide
4     .....
5     #On crée une variable appelée u
6     #qui contient la valeur de u0 au départ
7     .....
8     #On ajoute la valeur de u0 à la liste
9     .....
10    for k in range(....., .....):
11        #On calcule le terme d’après de la suite
12        #à partir du terme précédent
13        .....
14        #et on l’ajoute à la liste
15        .....
16    #On renvoie la liste complète
17    .....
```

4. On suppose qu’une fois le programme précédent complété de manière adéquate, la fonction `listesuite` évaluée en 5 renvoie la liste suivante.

```

1 [1.5, 1.25, 1.0625, 1.00390625,
2 1.0000152587890625, 1.0000000002328306]
```

À partir de ce résultat, que peut-on conjecturer sur le caractère borné, la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$.
 - À l’aide de la question 5a, montrer par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [1, 2]$$

\rightarrow Voir Correction DMI (question 2)

6. (a) Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$$

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. \rightarrow Voir Chapitre 7 - Exemple 3.4

7. (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie que l'on notera ℓ . → Voir Chapitre 9 - Exemple 2.15 (Étape 2)
- (b) Donner une équation vérifiée par la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. → Voir Chapitre 9 - Exemple 2.15 (Étape 3) & Exemple 3.6
- (c) Donner un encadrement de la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. → Voir Chapitre 9 - Exemple 3.6
- (d) Montrer que la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie également

$$\ell \leq \frac{3}{2}$$

- (e) En déduire la valeur de la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. → Voir Chapitre 9 - Exemple 2.15 (Étape 3) & Exemple 3.6

Exercice 3 – Adapté d'ÉCRICOME 2024. On considère la matrice M carrée de taille 3×3 dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 0, et dont tous les autres coefficients sont égaux à 1 :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note I_3 la matrice identité d'ordre 3.

Partie 1 - Inversibilité de M

1. Montrer par le calcul que $(M + I_3)^2 = 3(M + I_3)$.
2. Développer les expressions littérales $(M + I_3)^2$ et $3(M + I_3)$.
3. En déduire que

$$M^2 - M - 2I_3 = 0_{3,3}.$$

4. En déduire que la matrice M est inversible et déterminer son inverse. → Voir Chapitre 8 - Exemple 3.4

Partie 2 - Calcul des puissances de M

On considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Soient

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

Montrer que l'équation $PX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ admet une unique solution (que l'on explicitera en fonction de a , b et c). → Voir Chapitre 8 - Exemple 4.4

6. En déduire que P est inversible et que

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

→ Voir Chapitre 8 - Exemple 3.44

7. On pose $D = P^{-1}MP$. Calculer la matrice D et montrer que D est une matrice diagonale. → Voir Chapitre 8 - Section 4.3, Question 2(b)
8. Justifier précisément que $M = PDP^{-1}$.

9. Montrer par récurrence que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M^k = PD^kP^{-1}$$

→ Voir Chapitre 8 - Section 4.3, Question 2(d)

10. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'expression de D^k . → Voir Chapitre 8 - Section 4.3, Question 2(c)

11. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'expression de M^k . → Voir Chapitre 8 - Section 4.3, Question 2(e)

12. On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_k et b_k tels que

$$M^k = a_k M + b_k I_3.$$

Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'expression de a_k et b_k .

13. (Question ouverte) La formule de la question 12 peut-elle être étendue à $k = -1$?

14. (Question ouverte) À la question 3, on a montré que le polynôme $x \mapsto x^2 - x - 2$ était un polynôme annulateur de la matrice M . Quel lien peut-on faire entre ce polynôme et les coefficients de la matrice diagonale D trouvés à la question 7 ?