TD 12 – Application

Exercice 1 – Recherche d'antécédent. *Les deux questions sont indépendantes.*

1. Déterminer l'ensemble des antécédents de 4 puis de -1 par l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3x+4}{x^2+1} \end{array}$$

2. Déterminer l'ensemble des antécédents de $(1,2)$ par l'application

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y+z, x+2y-z) \end{array}$$

Exercice 2 – Composition. On considère les deux applications

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x+1 \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -2x+6 \end{array}$$

1. Justifier l'existence de $f\circ g$ et $g\circ f$ et donner leur expression.
2. A-t-on $f\circ g = g\circ f$? *Justifier la réponse.*
3. Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g.
4. ($\star$) Déterminer graphiquement les deux ensembles suivants

$$f\langle]-3,1] \rangle = \{f(x) | x \in]-3,1]\} \qquad \text{et} \qquad g\langle [-1,1] \rangle = \{g(x) | x\in [-1,1]\}$$

Exercice 3 – Composition. On considère les deux applications

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+e^x) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x \end{array}$$

Justifier que les applications f et g sont bien définies. Démontrer que,

$$f - f\circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$$

Exercice 4 – Image d'une fonction. On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3x+4}{x^2+1} \end{array}$$

Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 5 – Image d'une fonction. On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+2y, x+y, x+3y) \end{array}$$

Montrer que l'image de f est donné par

$$\mathrm{Im}(f) = \{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 |\ 2a-b-c=0\} = F.$$

Exercice 6 – Injectivité/surjectivité/bijectivité selon les ensembles de départ/d'arrivée. On considère l'application

$$h: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array}$$

1. Montrer que, lorsque $E=\mathbb{R}$ et $F=\mathbb{R}$, l'application $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est ni injective, ni surjective.
2. Montrer que, lorsque $E=\mathbb{R}_+$ et $F=\mathbb{R}$, l'application $h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ est injective, mais pas surjective.
3. Montrer que, lorsque $E=\mathbb{R}_+$ et $F=[1,+\infty[$, l'application $h:\mathbb{R}_+\to[1,+\infty[$ est une bijection.

Exercice 7 – Injectivité, surjectivité, bijectivité. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de chacun des applications f suivantes :

1. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+2 \end{array}$
2. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x+y \end{array}$
3. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$
4. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & |x+1| \end{array}$
5. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array}$
6. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \{-1,1\} \\ n & \longmapsto & (-1)^n \end{array}$

On pourra représenter les fonctions pour se faire une idée des propriétés à démontrer.

Exercice 8 – Bijectivité avec plusieurs méthodes. *Les trois questions sont indépendantes.*

1. On considère les deux applications suivantes
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+2y, -x+3y) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & \left(\frac{3a-2b}{5}, \frac{a+b}{5}\right) \end{array}$$
Montrer que $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une bijection et que g est la réciproque de f. *(cf méthode 1 du cours.)*
2. On considère la fonction
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y, x-y) \end{array}$$
Montrer que la fonction f est bijective et déterminer son application réciproque. *(cf méthode 2 du cours.)*
3. On considère la fonction
$$f: \begin{array}{ccc} \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(2x+1)-1 \end{array}$$
Montrer que la fonction f est bijective et déterminer son application réciproque. *(cf la méthode 2 du cours.)*

Exercice 9 – On considère les deux applications $f: [\![1,6]\!] \to [\![1,6]\!]$ et $g: [\![1,6]\!] \to [\![1,6]\!]$ définies par leur tableau de valeurs ci-dessous.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	4	2	1	6	5

x	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	1	2	3	4	6	5

1. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ (après avoir justifié que ces objets sont bien définis).
2. Déterminer les deux ensembles suivants
$$f\langle\{1,5\}\rangle = \{f(x) |\, x \in \{1,5\}\} \qquad \text{et} \qquad g\langle\{5,6\}\rangle = \{g(x) |\, x \in \{5,6\}\}$$
3. Justifier que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 10 – On considère l'application
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (3x-y, 2y-6x) \end{array}$$

1. Déterminer l'ensemble des antécédents de $(0,0)$.
2. Montrer, par double inclusion, que l'ensemble image de f est $\mathrm{Im}(f) = \{(a,-2a) |\, a \in \mathbb{R}\}$.
3. L'application $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 11 – On considère l'application
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\backslash\{-1\} \\ x & \longmapsto & \frac{1-x}{1+x} \end{array}$$

1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $f(x) \neq -1$.
2. Déterminer l'application $f \circ f$.
3. En déduire que $f: \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ est une bijection et on précisera sa bijection réciproque.

Exercice 12 – Soient E et F deux ensembles et $f, g: E \to F$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.