Interrogation du 09/12/2024

NOM Prénom :

1. On considère la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} = u_k^2 + 1$$

À l'aide des commentaires, compléter le programme suivant pour qui permet de créer une fonction, appelée `listesuite`, qui prend en argument un entier `n` et qui renvoie la liste de tous les termes de la suite (depuis u_0) jusqu'au `n`-ième.

```

1 . def listesuite(n): ..... #On définit une fonction
2     L = [] ..... #On introduit une liste vide
3     u = 1 ..... #On introduit une variable u qui vaut u0
4     L.append(u) ..... #On rajoute cette valeur à la liste
5     for k in range(1, n+1):
6         u = u**2 + 1 ..... #On calcule le k-ième terme de la suite
7         L.append(u) ..... #et on l'ajoute à la liste
8     return(L) ..... #On renvoie la liste complète

```

2. Étudier les trois limites suivantes.

- a. $x \mapsto \exp(-x) + \frac{1}{x} + \ln(x)$ en $+\infty$ b. $x \mapsto \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$ en 2^+ c. $x \mapsto \frac{\ln(x) + x}{\exp(x) + x^2}$ en $+\infty$

a. D'après les limites usuelles, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Donc, par somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(-x) + \frac{1}{x} + \ln(x) = +\infty$$

b) On a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2^+ \\ (x > 2)}} \frac{x+2}{x-2} = +\infty \quad \left(\frac{+}{0^+} \right)$$

puis

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Donc, par composition,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = +\infty$$

Tournez la page →

$$c) \forall x > 0, \frac{\ln x + x}{\exp(x) + x^2} = \frac{x \left(\frac{\ln x}{x} + 1 \right)}{\exp(x) \left(1 + \frac{x^2}{\exp(x)} \right)}$$

$$= \frac{x}{\exp(x)} \times \frac{\frac{\ln x}{x} + 1}{1 + \frac{x^2}{\exp(x)}}$$

- On
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + 1 = 1$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\exp(x)} = 0$ par croissances comparées et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\exp(x)} + 1 = 1$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\exp(x)} = 0$ par croissances comparées

Finalement, par multiplication, on obtient,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + x}{\exp(x) + x^2} = 0$$