

12

Application

- 1 Application, antécédent, image
- 2 Composition de deux applications
- 3 Image directe d'une application
- 4 Injectivité, surjectivité et bijectivité

1 Application, antécédent, image

Définition 1.1 Soient E et F deux ensembles. Une **application** d'un ensemble E dans un ensemble F est un objet qui, à tout élément x de E associe un unique élément y de F que l'on note $f(x)$. On note alors

$$f: E \longrightarrow F$$

$$x \longmapsto f(x)$$

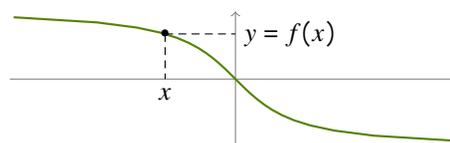
- E est appelé l'**ensemble de définition** de f , i.e.

$$\forall x \in E, f(x) \text{ existe}$$

- F est appelé l'**ensemble d'arrivée** de f , i.e.

$$\forall x \in E, f(x) \in F$$

Une application correspond donc à la donnée de trois éléments : un ensemble de départ E , un ensemble d'arrivée F et une expression f .



Si $y = f(x)$ avec $x \in E$, on dit que

- x est un **antécédent** de y
- et que y est l'**image** de x par f .

Exemple 1.2

Application	Ensemble de définition	Ensemble d'arrivée
$f: [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto \sqrt{x-2}$	$[2, +\infty[$ <u>car pour tout $x \in [2, +\infty[$, $\sqrt{x-2}$ existe</u>	\mathbb{R}_+ <u>car pour tout $x \in [2, +\infty[$, $\sqrt{x-2} \geq 0$</u>
$g: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ $k \longmapsto k^2 + 3$	\mathbb{Z}	\mathbb{N} <u>car pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k^2 + 3 \in \mathbb{N}$</u>
$h: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto (\ln(x))^2$	\mathbb{R}_+^* <u>car pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(\ln(x))^2$ existe</u>	\mathbb{R}_+ <u>car pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(\ln(x))^2 \in \mathbb{R}_+$</u>
$j_1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto x^2$	\mathbb{R} <u>car pour tout $x \in \mathbb{R}$, x^2 existe</u>	\mathbb{R}_+ <u>car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \in \mathbb{R}_+$</u>
$j_2: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto x^2$	\mathbb{R} <u>car pour tout $x \in \mathbb{R}$, x^2 existe</u>	\mathbb{R}_+ <u>car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \in \mathbb{R}_+$</u>
$j_3: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto x^2$	\mathbb{R} <u>car pour tout $x \in [0, 1]$, x^2 existe</u>	\mathbb{R}_+ <u>car pour tout $x \in [0, 1]$, $x^2 \in \mathbb{R}_+$</u>

Exemple 1.3 Reprenons les fonctions de l'Exemple 1.2.

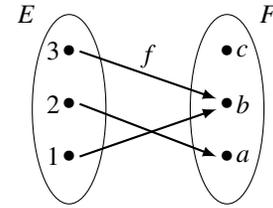
	Antécédent	Image
$f(2) = 0$	2 est <u>un</u> antécédent de 0 par f	0 est l' <u>image</u> de 2 par f
$g(2) = 7$	2 est <u>un</u> antécédent de 7 par g	7 est l' <u>image</u> de 2 par g
$g(-2) = g(2) = 7$	<u>Les</u> antécédents de 7 par g sont 2 et -2	7 est l' <u>image</u> de 2 par g
	-1 n'admet pas d'antécédent pas l'app j_3	2 n'admet pas d'image pas l'app. j_3

1.1 Comment représenter une application ?

On peut représenter une application de deux manières :

- Sous forme de diagrammes fléchés (lorsque les ensembles de départ et d'arrivée sont de cardinal fini)
- En représentant son graphe dans le plan muni \mathbb{R}^2 d'un repère.

Exemple 1.4 Soit $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$ l'application f représentée ci-contre.



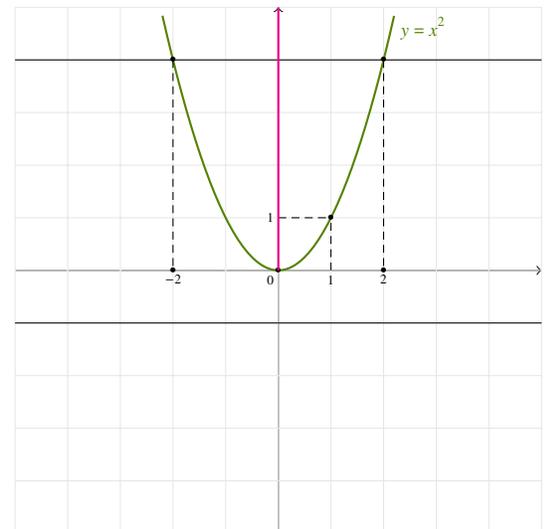
- L'ensemble de définition de f est $\{1, 2, 3\}$
 - L'ensemble d'arrivée de f est $\{a, b, c\}$
 - L'image de 2 par f est a
 - L'élément b admet deux antécédents qui sont 1 et 3.
- L'application est-elle *surjective*, c'est-à-dire est-ce que tous les éléments de l'espace d'arrivée admettent au moins un antécédent ?
Non, l'application n'est pas surjective car l'élément c de l'espace d'arrivée n'admet aucun antécédent.
 - L'application est-elle *injective*, c'est-à-dire est-ce que tous les éléments de l'espace d'arrivée admettent au plus un antécédent ?
Non, l'application n'est pas injective car l'élément b de l'espace d'arrivée admet deux antécédents.
 - Quel est l'image de cette application, c'est-à-dire quel est l'ensemble des valeurs prises par l'application ?
L'image de cette application est l'ensemble $\{b, c\}$.

Exemple 1.5

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application suivante.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$



- L'ensemble de définition de f est \mathbb{R}
 - L'ensemble d'arrivée de f est \mathbb{R}
 - L'image de 1 par f est 1
 - L'élément 4 a deux antécédents qui sont 2 et -2 .
- L'application est-elle *surjective*, c'est-à-dire est-ce que tous les éléments de l'espace d'arrivée admettent au moins un antécédent ?
Non, l'application n'est pas surjective car l'élément -1 de l'espace d'arrivée n'admet aucun antécédent.
 - L'application est-elle *injective*, c'est-à-dire est-ce que tous les éléments de l'espace d'arrivée admettent au plus un antécédent ?
Non, l'application n'est pas injective car l'élément 4 de l'espace d'arrivée admet deux antécédents.
 - Quel est l'image de cette application, c'est-à-dire quel est l'ensemble des valeurs prises par l'application ?
L'image de cette application est l'ensemble $[0, +\infty[$.

1.2 Comment montrer que deux applications sont égales ?

Proposition 1.6 Deux applications f et g sont égales si

- elles ont le même ensemble de départ E ,
- elles ont le même ensemble d'arrivée F ,
- et elles ont la même expression :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$$

! Ainsi, les fonctions

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lcl} g : [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

ne sont pas les mêmes, alors qu'elles ont la même expression. Par exemple, on a le droit de considérer l'objet mathématique $f(2)$ alors qu'on a pas le droit de considérer $g(2)$ (bien qu'on pourrait très facilement lui donner un sens...).

Exemple 1.7 Soient f et g deux applications de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(1 + e^x) \quad \text{et} \quad g(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$$

Montrons que les deux applications sont égales.

- Elles ont le même ensemble de départ, donné par \mathbb{R} .
- Elles ont le même ensemble d'arrivée, donné par \mathbb{R} .
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) = \ln(1 + e^x) = \ln(e^x(e^{-x} + 1)) = \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-x}) = x + \ln(1 + e^{-x}) = g(x)$$

Donc, les deux applications f et g sont égales.

1.3 Comment déterminer l'image d'un élément ?

? Pour déterminer l'image d'un élément $x \in E$ par l'application f , il faut calculer $f(x)$.

Exemple 1.8 On considère l'application

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Calculer l'image de l'élément 4 par l'application f .

Il s'agit de calculer $f(4)$. On a

$$f(4) = 4^2 = 16.$$

Donc l'image de 4 par la fonction f est 16.

Exemple 1.9 On considère l'application

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x - y, 3x - 2y) \end{array}$$

Calculer l'image de l'élément $(1, 3)$ par l'application f .

Il s'agit de calculer $f(1, 3)$. On a

$$f(1, 3) = (2 \times 1 - 3, 3 \times 1 - 2 \times 3) = (-1, -3)$$

Donc l'image de $(1, 3)$ par la fonction f est $(-1, -3)$.

1.4 Comment déterminer l'ensemble des antécédents d'un élément ?

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F .

- ❓ Pour déterminer les antécédents d'un élément $y \in F$ par l'application f , il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x . L'ensemble des solutions de cette équation correspond à l'ensemble des antécédents de y par f .

Exemple 1.10 On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Calculer l'antécédent de 36 par f .

Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = 36$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Raisonnons *par équivalence*. On a,

$$f(x) = 36 \iff x^2 = 36 \iff x = 6 \text{ ou } x = -6.$$

Donc, l'élément 36 admet exactement deux antécédents donnés par 6 et -6 .

🧩 **Vérification.**

$$f(6) = 6^2 = 36 \quad \checkmark \quad \text{et} \quad f(-6) = (-6)^2 = 36 \quad \checkmark$$

Exemple 1.11 On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (2x - y, 3x - 2y) \end{aligned}$$

Déterminer l'ensemble des antécédents de l'élément $(0, 1)$ par l'application f .

Il s'agit de résoudre l'équation $f(x, y) = (0, 1)$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Raisonnons *par équivalence*. On a,

$$\begin{aligned} f(x, y) = (0, 1) &\iff (2x - y, 3x - 2y) = (0, 1) \\ &\iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 2x \\ -x = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -2 \\ x = -1 \end{cases} \\ &\iff (x, y) = (-1, -2) \end{aligned}$$

Ainsi, l'élément $(0, 1)$ admet un unique antécédent donné par $(-1, -2)$.

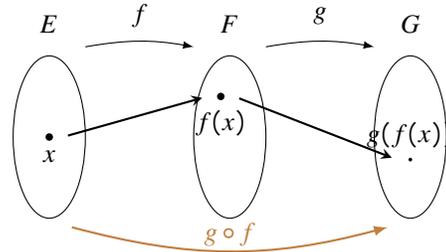
🧩 **Vérification.**

$$f((-1, -2)) = (2 \times (-1) - (-2), 3 \times (-1) - 2 \times (-2)) = (0, 1) \quad \checkmark$$

2 Composition de deux applications

Définition 2.1 Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. La composée $g \circ f$ est l'application définie par

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$



⚠ Avec les notations ci-dessus, $g \circ f$ est bien définie mais pas forcément $f \circ g$. De plus, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bien définies, en générale, ces deux applications ne sont pas égales.

Proposition 2.2 Soient E, F et G quatre ensembles. Soient $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow H$. Alors,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Exemple 2.3 On considère les applications

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* & \text{et} & & g : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x} & & & x &\longmapsto \ln(x) \end{aligned}$$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$ si c'est possible.

• **Étude de $g \circ f$.** Commençons par faire le schéma de composition.

$$\mathbb{R}_+^* \xrightarrow{f} \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

Donc

$$g \circ f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

est bien définie et,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x).$$

• **Étude de $f \circ g$.** Commençons par faire le schéma de composition. On a

$$\mathbb{R}_+^* \xrightarrow{g} \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Comme $\mathbb{R} \neq \mathbb{R}_+^*$, l'application $f \circ g$ n'est pas bien définie.

Exemple 2.4 On considère les applications

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{et} & & g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + 1 & & & x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$ si c'est possible.

• **Étude de $g \circ f$.** Commençons par faire le schéma de composition.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

Donc $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

- **Étude de $f \circ g$.** Commençons par faire le schéma de composition.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Donc $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$$

3 Image directe d'une application

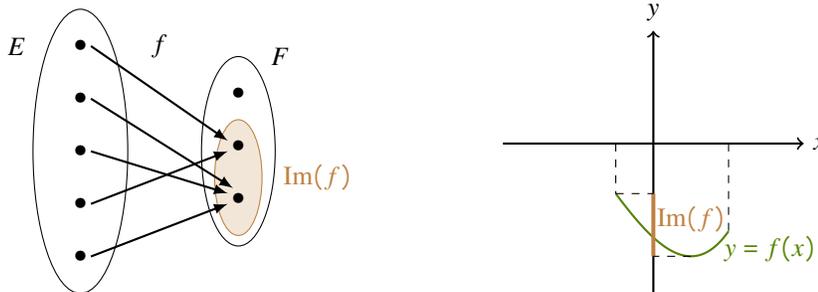
Définition 3.1 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On appelle **image directe** de f , et on note $\text{Im}(f)$ l'ensemble suivant

$$\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

L'image de f correspond à l'ensemble des éléments de F qui ont au moins un antécédent par f . On a donc la caractérisation suivante :

$$y \in \text{Im}(f) \iff \exists x \in E, y = f(x).$$

C'est une partie de F , c'est-à-dire $\text{Im}(f) \subset F$.



? Pour déterminer l'**image** d'une application $f : E \rightarrow F$, on dispose de plusieurs méthodes.

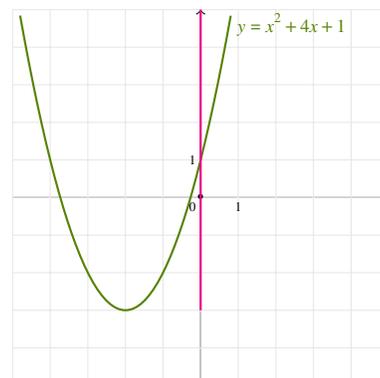
1. Si E et F sont des sous-parties de \mathbb{R} , on peut tracer le tableau de variation de la fonction pour visualiser l'ensemble des valeurs prises par la fonction.
2. Pour montrer que $\text{Im}(f)$ est un ensemble donné, on peut procéder par double-inclusion.

Exemple 3.2 — Avec la méthode 1.

Déterminer l'image de l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 4x + 1 \end{aligned}$$

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} (fonction polynomiale) donc on peut déduire ses variations grâce au signe de sa dérivée de la manière suivante.



x	0	-2	$+\infty$
$2x+4$		-	+
φ	$+\infty$	-3	$+\infty$

On en déduit (de manière non prouvée) que

$$\text{Im}(f) = [-3, +\infty[$$

Exemple 3.3 — Avec la méthode 2.

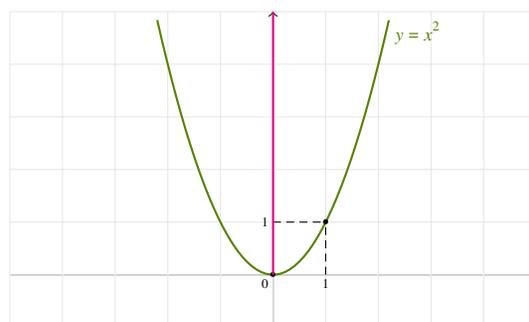
On considère l'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

Montrer que l'image de f est donné par

$$\text{Im}(f) = [0, +\infty[$$



Raisonnons par *double inclusion*.

- Montrons que $\text{Im}(f) \subset [0, +\infty[$.
Soit $y \in \text{Im}(f)$, c'est-à-dire

$$\text{il existe } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } y = f(x) = \quad (\text{existence paramètre})$$

Montrons que $y \in [0, +\infty[$, c'est-à-dire montrons que

$$y \geq 0 \quad (\text{condition à vérifier})$$

On a

$$y = f(x) = x^2 \geq 0$$

Donc $y \in [0, +\infty[$. D'où $\text{Im}(f) \subset [0, +\infty[$.

- Montrons que $[0, +\infty[\subset \text{Im}(f)$.
Soit $y \in [0, +\infty[$, c'est-à-dire

$$y \geq 0 \quad (\text{condition vérifiée})$$

Montrons que $y \in \text{Im}(f)$, c'est-à-dire montrons que

$$\text{il existe } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } y = f(x) \quad (\text{existence paramètre})$$

Posons $x = \sqrt{y}$. Tout d'abord, x existe bien car $y \geq 0$. De plus,

$$f(x) = x^2 = y$$

Donc $y \in \text{Im}(f)$. D'où $[0, +\infty[\subset \text{Im}(f)$.

- Finalement, on a bien montré que

$$\text{Im}(f) = [0, +\infty[$$

Exemple 3.4 — Avec la méthode 2. On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x - y, -3x + 3y) \end{aligned}$$

Montrer que

$$\text{Im}(f) = \{(a, -3a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Notons F l'ensemble de droite. Raisonnons par *double inclusion*.

- Montrons que $\text{Im}(f) \subset F$.

Soit $(a, b) \in \text{Im}(f)$. Montrons que $(a, b) \in F$.

- *Ce que l'on sait.* Comme $(a, b) \in \text{Im}(f)$, on sait que

$$\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, (a, b) = f(x, y). \quad (\text{Info})$$

- *Ce que l'on veut montrer.* Pour montrer que $(a, b) \in F$, il s'agit de montrer que

$$b = -3a$$

En utilisant l'expression de l'application f et (Info), on obtient que

$$\begin{cases} a &= x - y \\ b &= -3x + 3y \end{cases}$$

Et donc

$$b = -3x + 3y = -3(x - y) = -3a$$

Donc $(a, b) \in F$.

Donc $\text{Im}(f) \subset F$.

- Montrons que $F \subset \text{Im}(f)$.

Soit $(a, b) \in F$. Montrons que $(a, b) \in \text{Im}(f)$.

- *Ce que l'on sait.* Comme $(a, b) \in F$, on sait que

$$b = -3a \quad (\text{Info})$$

- *Ce que l'on veut montrer.* Pour montrer que $(a, b) \in \text{Im}(f)$, il s'agit de montrer que

$$\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, (a, b) = f(x, y) = (x - y, -3x + 3y)$$

Posons $x = a$ et $y = 0$. Alors

$$f(x, y) = (x - y, -3x + 3y) = (a, -3a) = (a, b)$$

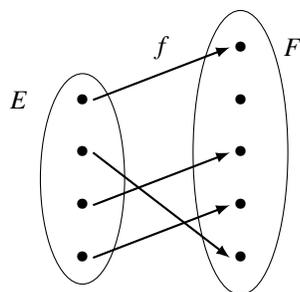
Donc $(a, b) \in \text{Im}(f)$.

Donc $F \subset \text{Im}(f)$.

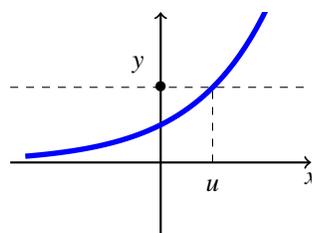
4 Injectivité, surjectivité et bijectivité

4.1 Injectivité

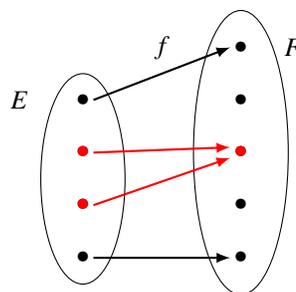
Définition 4.1 On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est **injective** si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au plus un antécédent dans E par f



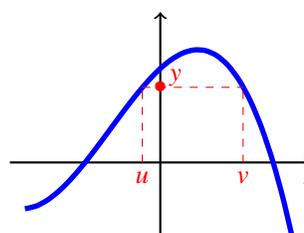
Injective



Injective



Non injective



Non injective

Proposition 4.2 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. L'application $f : E \rightarrow F$ est injective.
2. Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue x) admet au plus une solution dans E .
3. Pour tout $(x, y) \in E^2$, si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$.
4. Pour tout $(x, y) \in E^2$, si $x \neq y$ alors $f(x) \neq f(y)$, c'est-à-dire deux éléments distincts n'ont pas la même image par f .

Proposition 4.3 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. L'application $f : E \rightarrow F$ n'est pas injective s'il existe deux éléments distincts de E , x et y tels que $f(x) = f(y)$.

? Pour démontrer que $f : E \rightarrow F$ est **injective**, voici la rédaction habituelle.

Soient x et y des éléments de E quelconques.

Supposons que $f(x) = f(y)$.

Montrons que $x = y$.

Insérer raisonnement mathématique

Donc $x = y$. Ainsi, l'application $f : E \rightarrow F$ est injective.

Pour démontrer que $f : E \rightarrow F$ n'est **pas injective**, voici la rédaction habituelle.

Soient $x =$ *donner valeur* et $y =$ *donner valeur*.

D'une part, $x \neq y$.

D'autre part, $f(x) = f(y)$ car *insérer raisonnement mathématique*.

Donc l'application $f : E \rightarrow F$ n'est pas injective.

Exemple 4.4 On considère l'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (x, x^2) \end{aligned}$$

Montrons que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est injective.

Soient x et y des éléments de \mathbb{R} quelconques.

Supposons que $f(x) = f(y)$.

Montrons que $x = y$.

Comme $f(x) = f(y)$, on a $(x, x^2) = (y, y^2)$, c'est-à-dire $x = y$ et $x^2 = y^2$.

En particulier, on a $x = y$. Ainsi, l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est injective.

Exemple 4.5 On considère l'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x + y, x - 3y, x + 2y) \end{aligned}$$

Montrons que $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est injective.

Soient $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ des éléments de \mathbb{R} quelconques.

Supposons que $f(u) = f(v)$.

Montrons que $u = v$.

Comme $f(u) = f(v)$, on a $(x + y, x - 3y, x + 2y) = (x' + y', x' - 3y', x' + 2y')$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x + y = x' + y' \\ x - 3y = x' - 3y' \\ x + 2y = x' + 2y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x' + y' \\ -4y = -4y' \\ y = y' \end{cases} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} \Leftrightarrow u = v$$

Donc $u = v$. Ainsi, l'application $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est injective.

Exemple 4.6 On considère l'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Montrons que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ n'est pas injective.

Soient $x = 1$ et $y = -1$.

D'une part, $x \neq y$.

D'autre part, $f(1) = 1^2 = 1$ et $f(-1) = (-1)^2 = 1$ donc $f(1) = f(-1)$.

Donc l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ n'est pas injective.

Exemple 4.7 On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Montrons que $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est injective.

Soient x et y des éléments de \mathbb{R}_+ quelconques.

Supposons que $f(x) = f(y)$.

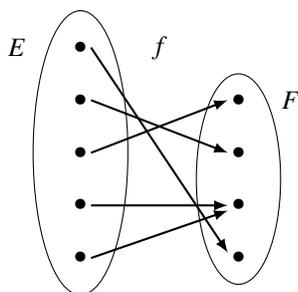
Montrons que $x = y$.

Comme $f(x) = f(y)$, on a $x^2 = y^2$, donc $x = y$ ou $x = -y$. Comme x et y sont positifs, nécessairement, $x = y$.

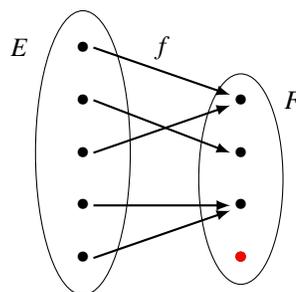
Donc $x = y$. Ainsi, l'application $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est injective.

4.2 Surjectivité

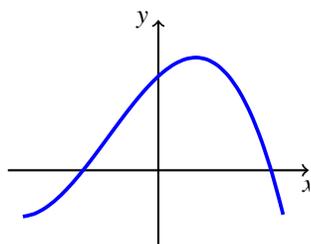
Définition 4.8 On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est **surjective** si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet au moins un antécédent dans E par f .



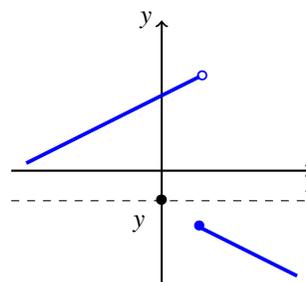
Surjective



Non surjective



Surjective



Non surjective

Proposition 4.9 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. L'application $f : E \rightarrow F$ est surjective.
2. Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution.
3. Pour tout élément y de F , il existe un élément x de E tel que $y = f(x)$.
4. $\text{Im}(f) = F$.

Proposition 4.10 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. L'application $f : E \rightarrow F$ n'est pas surjective s'il existe un élément $y \in F$ qui n'a pas d'antécédent par f .



Pour démontrer que $f : E \rightarrow F$ est **surjective**, voici la rédaction habituelle.

Soit y un élément de F quelconque.

Montrons qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Insérer raisonnement mathématique

Donc $y = f(x)$ avec $x \in E$. Ainsi, l'application $f : E \rightarrow F$ est surjective.

Pour démontrer que $f : E \rightarrow F$ n'est **pas surjective**, voici la rédaction habituelle.

Soit $y = *$ donner valeur*.

Montrons que y n'admet pas d'antécédent par f , c'est-à-dire que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x n'admet pas de solution.

Insérer raisonnement mathématique

Donc l'application $f : E \rightarrow F$ n'est pas surjective.

Exemple 4.11 On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

Montrons que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective.

Soit z un élément de \mathbb{R} quelconque.

Montrons qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = f(x, y)$.

On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xy = z$.

Ici, on trouve une solution "évidente". On peut prendre par exemple $(x, y) = (z, 1)$ (ou bien encore $(x, y) = (1, z), \dots$) car $xy = z \times 1 = z$.

Donc $z = f(z, 1)$ avec $(z, 1) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective.

Exemple 4.12 On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + y + z, x - z) \end{aligned}$$

Montrons que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est surjective.

Soit $v = (a, b)$ un élément de \mathbb{R}^2 quelconque.

Montrons qu'il existe $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $v = f(u)$, c'est-à-dire $(a, b) = (x + y + z, x - z)$.

On a

$$f(u) = v \iff \begin{cases} x + y + z = a \\ x - z = b \end{cases} \iff \begin{cases} (b + z) + y + z = a \\ x = b + z \end{cases} \iff \begin{cases} y = a - b - 2z \\ x = b + z \end{cases}$$

En prenant par exemple $z = 0$, on trouve que $v = f(u)$ avec $u = (b, a - b, 0) \in \mathbb{R}^3$. Ainsi, l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est surjective.

Exemple 4.13 On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Montrons que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas surjective.

Soit $y = -1 \in \mathbb{R}$.

Montrons que y n'admet pas d'antécédent par f , c'est-à-dire que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x n'admet pas de solution. On a :

$$f(x) = y \iff x^2 = -1.$$

Donc, l'équation $f(x) = -1$ n'admet pas de solution. Donc l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas surjective.

Exemple 4.14 On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Montrons que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est surjective.

Soit y un élément de \mathbb{R}_+ quelconque.

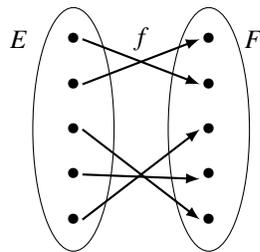
Montrons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$.

On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = x^2$. Comme y est positif, cette équation admet deux solutions données par \sqrt{y} et $-\sqrt{y}$.

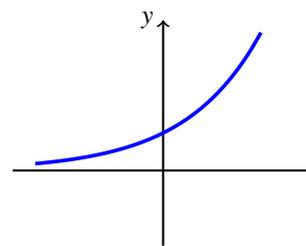
Donc, par exemple, $y = f(\sqrt{y})$ avec $\sqrt{y} \in \mathbb{R}$. Donc l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est surjective.

4.3 Bijektivité

Définition 4.15 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est **bijective** si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet un unique antécédent dans E par f .



Bijective



Bijective

Proposition 4.16 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. L'application $f : E \rightarrow F$ est bijective.
2. Pour tout élément y de F , il existe un unique élément x de E tel que $y = f(x)$.
3. L'application $f : E \rightarrow F$ est injective et surjective.

Proposition 4.17 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. L'application $f : E \rightarrow F$ est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$, c'est-à-dire,

$$\text{pour tout } x \in E, g(f(x)) = x \quad \text{et} \quad \text{pour tout } y \in F, f(g(y)) = y.$$

Dans ce cas, l'application g est unique. Elle est appelée **bijection réciproque** de f et est notée f^{-1} .

Exemple 4.18 La fonction $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et la fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ sont bijectives et sont des bijections réciproques l'une de l'autre car

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exp(\ln(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}, \ln(\exp(y)) = y.$$

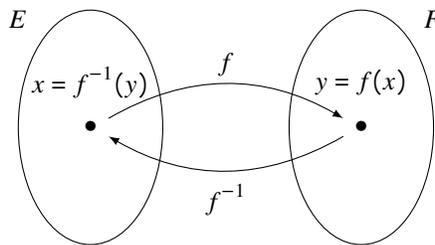
Proposition 4.19 Soit $f : E \rightarrow F$ bijective. Alors, la bijection réciproque est l'application qui, à un élément y de F , associe l'unique antécédent de y par f dans E , noté x ,

$$f^{-1} : F \longrightarrow E$$

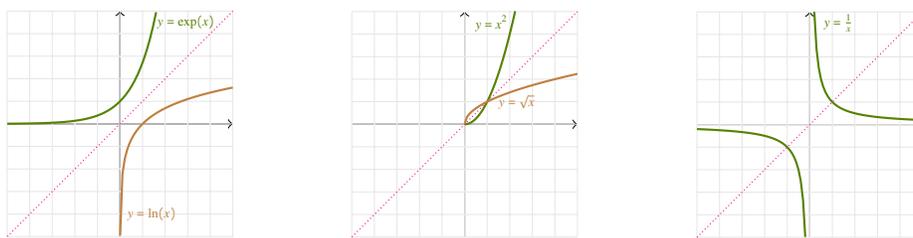
$$y \longmapsto x \text{ tel que } y = f(x)$$

De plus, pour tout $x \in E$ et $y \in F$, on a

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$



Proposition 4.20 Soient E et F deux parties de \mathbb{R} et $f : E \rightarrow F$ bijective. Alors les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.



? Pour démontrer que $f : E \rightarrow F$ est **bijective**, on dispose de plusieurs méthodes.

1. On donne directement l'expression d'une fonction g telle que $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$. Alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

Soit $x \in E$. Montrons que $g(f(x)) = x$.

Insérer raisonnement mathématique

Soit $y \in F$. Montrons que $f(g(y)) = y$.

Insérer raisonnement mathématique

Donc, $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$. Donc f est bijective et $f^{-1} = g$.

2. On montre que, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ (d'inconnue $x \in E$) admet une unique solution. Dans ce cas, f est bijective et on obtient aussi l'expression de f^{-1} . Dans ce cas, voici la rédaction habituelle.

Soit y un élément de F quelconque.

Montrons qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Insérer raisonnement mathématique

Donc il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi, l'application $f : E \rightarrow F$ est bijective et pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y) = x$ où x est l'unique solution de l'équation $y = f(x)$.

3. On montre que $f : E \rightarrow F$ est injective et surjective à l'aide des méthodes expliquées précédemment. Dans ce cas, f est bijective mais on n'obtient pas l'expression de f^{-1} .

Exemple 4.21 — Avec la méthode 1. On considère les applications

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} & \text{et} & & g : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ k &\longmapsto k+1 & & & n &\longmapsto n-1 \end{aligned}$$

Montrons que l'application f est bijective, de bijection réciproque donnée par g .

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrons que $g(f(k)) = k$. On a

$$g(f(k)) = g(k+1) = (k+1) - 1 = k.$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrons que $f(g(n)) = n$. On a

$$f(g(n)) = f(n-1) = (n-1) + 1 = n.$$

Donc, $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{Z}}$ et $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{Z}}$. Donc f est bijective et $f^{-1} = g$.

Exemple 4.22 — Avec la méthode 2. On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x+y, x-y) \end{aligned}$$

Soit $v = (a, b)$ un élément de \mathbb{R}^2 quelconque.

Montrons qu'il existe un unique $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v = f(u)$.

Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$f(u) = v \iff \begin{cases} x+y = a \\ x-y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \end{cases}$$

Donc il existe un unique $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $v = f(u)$, donné par $u = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$. Ainsi, l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est bijective et pour tout $v = (a, b) \in F$, on a

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b) &\longmapsto \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right) \end{aligned}$$

Exemple 4.23 — Avec la méthode 3. On considère l'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, définie par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Montrons que l'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ est bijective.

- Injectivité.

Soient n_1 et n_2 des éléments de \mathbb{N} quelconques.

Supposons que $f(n_1) = f(n_2)$.

Montrons que $n_1 = n_2$.

- Si $f(n_1) = f(n_2) \geq 0$ alors nécessairement, n_1 et n_2 sont pairs, donc

$$f(n_1) = \frac{n_1}{2} = f(n_2) = \frac{n_2}{2}$$

et donc $n_1 = n_2$.

- Si $f(n_1) = f(n_2) \leq 0$ alors nécessairement, n_1 et n_2 sont impairs, donc

$$f(n_1) = -\frac{n_1+1}{2} = f(n_2) = -\frac{n_2+1}{2}$$

et donc $n_1 = n_2$.

Enfin, dans tous les cas, on a $n_1 = n_2$. Ainsi, l'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ est injective.

- Surjectivité.

Soit k un élément de \mathbb{Z} quelconque.

Montrons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k = f(n)$.

- Si $k \geq 0$ alors, on cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que n est pair et $k = \frac{n}{2}$. On peut prendre $n = 2k \in \mathbb{N}$.
- Si $k < 0$ alors, on cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que n est impair et $k = -\frac{n+1}{2}$. On peut prendre $n = -2k - 1 \in \mathbb{N}$.

Dans tous les cas, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k = f(n)$. Ainsi, l'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ est surjective.

- Conclusion.

L'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ est injective et surjective, elle est donc bijective.

Proposition 4.24 Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux bijections. Alors

1. Alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est une bijection.
2. Et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.