

Exercice 1

1. .. On résout l'équation $f(x) = 4$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) = 4 \Leftrightarrow \frac{3x+4}{x^2+1} = 4$$

$$\Leftrightarrow 3x+4 = 4(x^2+1)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(4x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 4x-3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{4}$$

Donc l'ensemble des antécédents de 4 par f est donné par

$$\left\{ 0, \frac{3}{4} \right\}$$

Vérification: $f(0) = \frac{4}{1} = 4 \quad \checkmark$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3 \times \frac{3}{4} + 4}{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{9}{4} + 4}{\frac{9}{16} + 1} = \frac{\frac{25}{4}}{\frac{25}{16}} = \frac{25}{4} \times \frac{16}{25} = 4 \quad \checkmark$$

.. On résout l'équation $f(x) = -1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{3x+4}{x^2+1} = -1$$

$$\Leftrightarrow 3x+4 = -(x^2+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 5 = 0$$

$$\Delta = (3)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 9 - 20 = -11 < 0$$

Donc l'équation $x^2 + 3x + 5 = 0$ n'admet de solution.

Donc -1 n'admet pas d'antécédent par f .

2. On résout l'équation $g(x, y, z) = (1, 2)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$g(x, y, z) = (1, 2) \Leftrightarrow (2x + y + z, x + 2y - z) = (1, 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -3y + 3z = -3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{deux équations pour trois inconnues:} \\ \text{on exprime } x \text{ et } y \text{ en fct de } z \text{ (par ex.)} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y = z + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z + 1 \end{cases}$$

Donc l'ensemble des antécédents de $(1, 2)$ par g est donné par

$$\{ (-z, z+1, z) \mid z \in \mathbb{R} \}$$

Exercice 2

1. On a :

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{g \circ f}$

Donc $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie
et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(3x+1) \\ &= -2(3x+1)+6 \\ &= -6x+4 \end{aligned}$$

On a :

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

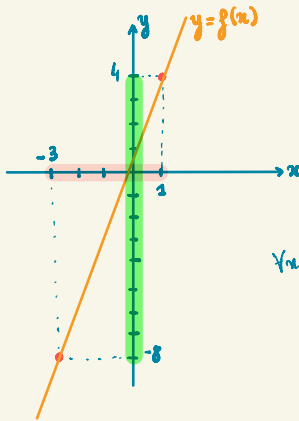
$\underbrace{\hspace{10em}}_{f \circ g}$

Donc $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie
et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

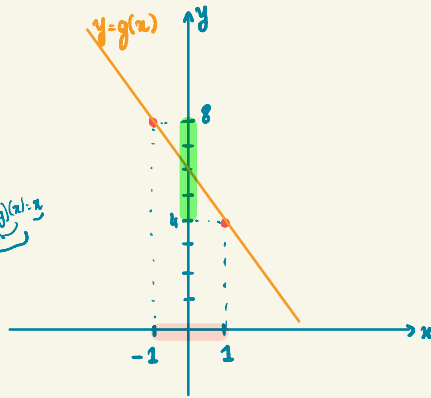
$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(-2x+6) \\ &= 3(-2x+6)+1 \\ &= -6x+19 \end{aligned}$$

2. On a $f \circ g \neq g \circ f$ car par exemple, $(f \circ g)(0) = 19$ alors que $(g \circ f)(0) = 4$.

3.



$$\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{f(x) - f \circ g(x)}_{= x}$$

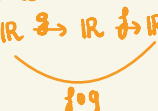


4. Donc $f<[-3, 1]> = [-8, 4]$

Donc $g<[-1, 1]> = [4, 8]$

Exercice 3

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, on a $1 + e^x > 1 > 0$ donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
De plus, g est une fonction affine donc est bien définie sur $\mathbb{R}$.

On a
 $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

 $f \circ g$

Donc $f \circ g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

But : Montrons que $f \circ f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}}$, c'-à-d
que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
 $f(x) - (f \circ g)(x) = x$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) - (f \circ g)(x) &= \ln(1 + e^x) - f(-x) \\ &= \ln(1 + e^x) - \ln(1 + e^{-x}) \\ &= \ln(e^x(e^x + 1)) - \ln(1 + e^{-x}) \\ &= \ln(e^x) + \ln(\cancel{e^{-x}} + 1) - \ln(\cancel{1 + e^{-x}}) \\ &= x. \end{aligned}$$

Exercice 4

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \frac{3x+4}{x^2+1}$

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas ($\forall x \in \mathbb{R}, x^2+1 \neq 0$).
 Et sa dérivée vaut :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3(x^2+1) - (3x+4) \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

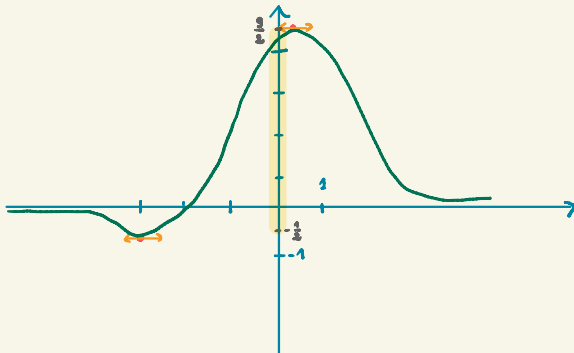
$$= \frac{-3x^2 - 8x + 3}{(x^2+1)^2}$$

	$-\infty$	-3	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$-3x^2-8x+3$	-	0	0	+
$(x^2+1)^2$	+			+
$f'(x)$	-	0	0	-
f	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	0

Résolution de
 $-3x^2-8x+3=0$
 $\hookrightarrow \Delta = 100 > 0$
 donc 2 racines réelles
 $\hookrightarrow x_1 = \frac{1}{3}$ et $x_2 = -3$

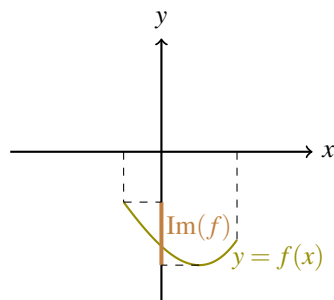
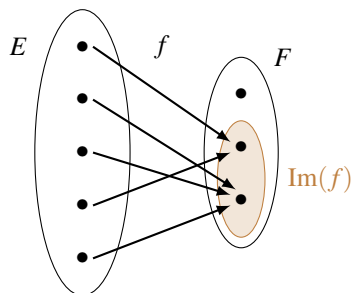
Limite en $+\infty$
 $\forall x \neq 0, f(x) = \frac{x(3+\frac{4}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{x} \cdot \frac{3+\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}$
 Donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = 0$

On en déduit l'allure de la courbe :



Donc

$$\text{Im} f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right]$$



Pour déterminer l'**image** d'une application $f : E \rightarrow F$, on dispose de plusieurs méthodes.

1. Si E et F sont des sous-parties de $\mathbb{R}$, on peut tracer le tableau de variation de la fonction pour visualiser l'ensemble des valeurs prises par la fonction. *Cette méthode sera étudiée dans un chapitre suivant.*
2. Pour montrer que $\text{Im}(f)$ est un ensemble donné, on peut procéder par double-inclusion.

Exercice 5 — Avec la méthode 2. On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x + 2y, x + y, x + 3y) \end{aligned}$$

Montrons que l'image de f est donné par

$$\text{Im}(f) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a - b - c = 0\} = F.$$

Procédons par double inclusion.

- Montrons que $\text{Im}(f) \subset F$.
Soit $(a, b, c) \in \text{Im}(f)$. Montrons que $(a, b, c) \in F$.
Comme $(a, b, c) \in \text{Im}(f)$, on sait qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a, b, c) = f(x, y)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} a = x + 2y \\ b = x + y \\ c = x + 3y \end{cases}$$

Pour montrer que $(a, b, c) \in F$, il s'agit de montrer que $2a - b - c = 0$. On a

$$2a - b - c = 2(x + 2y) - (x + y) - (x + 3y) = 0$$

Donc $(a, b, c) \in F$ et on a montré que $\text{Im}(f) \subset F$.

- Montrons que $F \subset \text{Im}(f)$.
Soit $(a, b, c) \in F$. Montrons que $(a, b, c) \in \text{Im}(f)$.
Comme $(a, b, c) \in F$, on sait que $2a - b - c = 0$.
Pour montrer que $(a, b, c) \in \text{Im}(f)$, il s'agit de trouver $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a, b, c) = f(x, y)$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} f(x, y) = (a, b, c) &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = a \\ x + y = b \\ x + 3y = c \quad (\text{et } c = 2a - b) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = a \\ -y = b - a \\ y = 2a - b - a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -a + 2b \\ y = a - b \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $(a, b, c) = f(-a + 2b, a - b)$ et donc $(a, b, c) \in \text{Im}(f)$. Ainsi, $F \subset \text{Im}(f)$.

Exercice 6

1. Soit $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 + 1$.

.. Injectivité?

Soient $x = 1$ et $y = -1$ deux éléments de $\mathbb{R}$.

D'une part, $x \neq y$.

D'autre part, $h(x) = 3 = h(y)$.

Donc $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas injective.

.. Surjectivité?

L'équation $h(x) = x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 1$).

Donc 0 n'admet pas d'antécédent par h .

Donc $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas surjective.

2. Soit $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 + 1$.

Injectivité:

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que $h(x) = h(y)$.

Montrons que $x = y$.

Comme $h(x) = h(y)$, on a

$$x^2 + 1 = y^2 + 1$$

$$\text{c-à-d: } x^2 = y^2$$

$$\text{c-à-d: } x = y \text{ ou } x = -y$$

Comme x et y sont tous les deux positifs, nécessairement $x = y$.

Donc $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est injective.

.. Surjectivité?

L'équation $h(x) = x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 1$).

Donc 0 n'admet pas d'antécédent par h .

Donc $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas surjective.

3. soit $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow [1; +\infty[$
 $x \mapsto x^2 + 1$

Injectivité:

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que $h(x) = h(y)$.
Montrons que $x = y$.

Comme $h(x) = h(y)$, on a

$$x^2 + 1 = y^2 + 1$$

$$\text{c-à-d: } x^2 = y^2$$

$$\text{c-à-d: } x = y \text{ ou } x = -y$$

Comme x et y sont tous les deux positifs, nécessairement $x = y$.
Donc $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow [1; +\infty[$ est injective.

Surjectivité:

Soit $y \in [1; +\infty[$. On cherche $x \in \mathbb{R}_+$ tq $h(x) = y$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a:

$$h(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 1 = y$$

$$\Leftrightarrow x^2 = y - 1$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{y-1} \text{ ou } x = -\sqrt{y-1} \quad \text{car } y-1 \geq 0 \text{ car } y \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{y-1} \quad \text{car } x \geq 0$$

Donc $y = h(x)$ avec $x = \sqrt{y-1} \in \mathbb{R}_+$

Donc $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow [1; +\infty[$ est surjective.

Bijectivité:

$h: \mathbb{R}_+ \rightarrow [1; +\infty[$ est bijective car elle est injective et surjective.

Exercice 7

1. Soit $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto n+2$

Injectivité:

Soient n_1 et n_2 deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n_1) = f(n_2)$.

Montrons que $n_1 = n_2$.

Comme $f(n_1) = f(n_2)$, on a $n_1 + 2 = n_2 + 2$ et donc $n_1 = n_2$.

Donc $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est injective.

Surjectivité:

L'équation $m+2=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$.

Donc 0 n'admet pas d'antécédent par f .

Donc $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{W}$ n'est pas surjective (et donc non bijective).

2. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto 2x + y$

Injectivité:

On a $f(0, 1) = 1 = f(\frac{1}{2}, 0)$

alors que $(0, 1) \neq (\frac{1}{2}, 0)$.

Donc $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas injective (et donc non bijective).

Surjectivité:

Soit $z \in \mathbb{R}$. On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = 2x + y = z$.

On peut prendre par ex, $(x, y) = (0, z) \in \mathbb{R}^2$.

Ainsi $z = f(0, z)$. Donc $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective.

3. Soit $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x}$

Injectivité:

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}_+^*$ tels que $f(x) = f(y)$.

Montrons que $x = y$.

Comme $f(x) = f(y)$, on a $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ et donc $x = y$.

Donc $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est injective.

Surjectivité:

L'équation $\frac{1}{x} = 0$ (dans $\mathbb{R}_+^*$) n'a pas de solution (car $\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 = x \cdot 0 = 0$ pour $x \neq 0$).

Donc 0 n'admet pas d'antécédent par f .

Donc f n'est pas surjective (et donc non bijective).

4. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto |x+1|$

Injectivité:

On a $f(0) = |1| = 1$
et $f(-2) = |-1| = 1$

Donc $f(0) = f(-2)$.

Mais $0 \neq -2$.

Donc $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ n'est pas injective (et donc non bijective).

Surjectivité:

Soit $y \in \mathbb{R}_+$. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = |x+1| = y$.

On peut prendre par exemple $x = y-1 \in \mathbb{R}$ car

$$f(y-1) = |y| = y \text{ car } y \geq 0.$$

Donc $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est surjective.

5. Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$

Injectivité:

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}_+$ tq $f(x) = f(y)$.

Montrons que $x=y$.

Comme $f(x) = f(y)$, on a :

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{y^2+1}$$

et donc en élevant au carré,

$$x^2+1 = y^2+1$$

donc $x^2 = y^2$

donc $x = y$ ou $x = -y$.

Or, x et y sont tous les deux positifs

donc nécessairement, $x=y$.

Donc $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est injective.

Surjectivité:

Comme une racine carrée est toujours positive,
l'équation $\sqrt{x^2+1} = -1$ n'admet pas de solutions.

Donc 0 n'admet pas d'antécédent par f .

Donc $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas surjective (et donc pas bijective).

6. Soit $f: \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 1\}$
 $n \mapsto (-1)^n$

Injectivité:

On a $f(2) = 1 = f(4)$ alors que $2 \neq 4$.

Donc $f: \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 1\}$ n'est pas injective (et donc pas bijective).

Surjectivité:

On a $1 = f(2)$
 $-1 = f(1)$ (par ex.)

Donc tous les éléments de $\{1, -1\}$ admettent un antécédent par f .

Donc $f: \mathbb{N} \rightarrow \{1, -1\}$ est surjective

Exercice 8

1. Pour montrer que $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est bijective, on va montrer que

$$f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}^2} \quad \text{et} \quad g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^2}.$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} \bullet f(g(x, y)) &= f\left(\frac{3x-2y}{5}, \frac{x+y}{5}\right) \\ &= \left(\frac{3x-2y}{5} + 2 \times \frac{x+y}{5}, -\frac{3x-2y}{5} + 3 \times \frac{x+y}{5}\right) \\ &= \left(\frac{3x-2y+2x+2y}{5}, \frac{-3x+2y+3x+3y}{5}\right) \\ &= \left(\frac{5x}{5}, \frac{5y}{5}\right) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet g(f(x, y)) &= g(x+2y, -x+3y) \\ &= \left(\frac{3(x+2y)-2(-x+3y)}{5}, \frac{(x+2y)+(-x+3y)}{5}\right) \\ &= \left(\frac{3x+6y+2x-6y}{5}, \frac{x+2y-x+3y}{5}\right) \\ &= \left(\frac{5x}{5}, \frac{5y}{5}\right) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

Donc f est bijective et sa bijection réciproque est donnée par g .

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que l'équation $f(x, y) = (a, b)$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ admet une unique solution.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$f(x, y) = (a, b) \iff (2x - y, x - y) = (a, b)$$

$$\iff \begin{cases} 2x - y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y = b & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2x - y = a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y = b \\ y = -2b + a & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = a - b \\ y = a - 2b \end{cases}$$

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $f(x,y) = (a,b)$ admet une unique solution donnée par

$$(x,y) = (a-b, a-2b)$$

Donc $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est bijective et sa bijection réciproque est donnée par:

$$f^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$f^{-1}: (a,b) \longrightarrow (a-b, a-2b)$$

3. Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrons que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in]-\frac{1}{2}; +\infty[$ admet une unique solution.

Soit $x \in]-\frac{1}{2}; +\infty[$. On a

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \ln(2x+1) - 1 = y \\ &\iff \ln(2x+1) = y+1 \\ &\iff 2x+1 = \exp(y+1) \\ &\iff x = \frac{\exp(y+1) - 1}{2} \end{aligned}$$

Donc, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in]-\frac{1}{2}; +\infty[$ tel que $f(x) = y$,
donnée par

$$x = \frac{\exp(y+1) - 1}{2}$$

Donc $f:]-\frac{1}{2}; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est bijective et sa bijection réciproque est donnée par

$$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{1}{2}; +\infty[$$
$$f^{-1}: y \longmapsto \frac{\exp(y+1) - 1}{2}$$

Exercice 9

1. On a :

$$\llbracket 1, 6 \rrbracket \xrightarrow{f} \llbracket 1, 6 \rrbracket \xrightarrow{g} \llbracket 1, 6 \rrbracket$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{g \circ f}$

Donc $g \circ f: \llbracket 1, 6 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, 6 \rrbracket$ bien défini.

x	1	2	3	4	5	6
$(g \circ f)(x)$	3	4	2	1	5	6

car $g(f(1)) = g(3) = 3$

$g(f(2)) = g(4) = 4$

...

On a :

$$\llbracket 1, 6 \rrbracket \xrightarrow{g} \llbracket 1, 6 \rrbracket \xrightarrow{f} \llbracket 1, 6 \rrbracket$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{f \circ g}$

Donc $f \circ g: \llbracket 1, 6 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, 6 \rrbracket$ bien défini.

x	1	2	3	4	5	6
$(f \circ g)(x)$	3	4	2	1	5	6

2. On a :

$$f < \{1, 5\} > = \{f(1), f(5)\} = \{3, 6\}$$

$$g < \{5, 6\} > = \{g(5), g(6)\} = \{6, 5\}$$

3. Considérons la fonction h donnée par :

x	1	2	3	4	5	6
$h(x)$	4	3	1	2	6	5

Alors, on vérifie que

• pour tout $x \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, $f(h(x)) = x$

• pour tout $x \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, $h(f(x)) = x$

Donc f est bijective et sa bijection réciproque est donnée par h .

Exercice 10

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (3x - y, 2y - 6x) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 0 \\ -6x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$$

$$\Leftrightarrow y = 3x$$

l'ensemble des antécédents de $(0, 0)$ est donné par :

$$\{(x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

2. Montrons que $\text{Im}(f) = \underbrace{\{(a, -2a) \mid a \in \mathbb{R}\}}_{:= F}$ par double inclusion.

► Mque $\text{Im}(f) \subseteq F$.

Soit $(a, b) \in \text{Im}(f)$. Montrons que $(a, b) \in F$.

Comme $(a, b) \in \text{Im}(f)$, il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tq $(a, b) = (3x - y, 2y - 6x)$.

Pour mque $(a, b) \in F$, il s'agit de mque $b = -2a$.

On a

$$\begin{aligned} -2a &= -2(3x - y) \\ &= -6x + 2y \\ &= b. \end{aligned}$$

Donc $(a, b) \in F$. Donc $\text{Im}f \subseteq F$.

► Mque $F \subseteq \text{Im}f$.

Soit $(a, b) \in F$. Mque $(a, b) \in \text{Im}f$.

Comme $(a, b) \in F$, on sait que $b = -2a$.

On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tq $(a, b) = f(x, y)$.

On peut prendre par ex

$$(x, y) = (0, -a)$$

car $f(0, -a) = (a, -2a) = (a, b)$ par hypothèse.

Donc $(a, b) \in \text{Im}f$. Donc $F \subseteq \text{Im}f$.

3. Injectivité :

D'après la question 1, $f(0, 0) = f(1, 3) = (0, 0)$ (l'élément $(0, 0)$ admet une infinité d'antécédent).

Mais $(0, 0) \neq (1, 3)$. Donc $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ n'est pas injective (et donc pas bijective).

Surjectivité :

D'après la question 2, $\text{Im}f = \{(a, -2a) \mid a \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^2$ (par ex $(1, 0) \notin \text{Im}f$ car $0 \neq -2 \cdot 1$)

Donc $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ n'est pas surjective.

Exercice 41

1. Cette question consiste à montrer que f est bien définie au sens où :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On a bon ens. d'arrivée

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} = -1$$

$$\Leftrightarrow 1-x = -(1+x)$$

$$\Leftrightarrow 1-x = -1-x$$

$$\Leftrightarrow 1 = -1$$

impossible

Donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) \neq -1$.

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On a

$$\begin{aligned} \underbrace{(f \circ f)}_{\text{bien déf}}(x) &= f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \\ &= \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} \\ &= \frac{\frac{1+x-(1-x)}{1+x}}{\frac{1+x+1-x}{1+x}} \\ &= \frac{2x}{1+x} \times \frac{1+x}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

3. Comme $f \circ f = \text{id}_{\mathbb{R} \setminus \{-1\}}$, f est bijective et sa bijection réciproque est donnée par elle-même.