DS 2

Exercice 1 – *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. (DS1) Pour les trois fonctions suivantes, donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction.

$$f : x \mapsto 3x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \qquad g : x \mapsto \sqrt{2x+3} \qquad h : x \mapsto \ln(x-3)$$

La fonction f est $\boxed{\text{définie et dérivable sur } \mathbb{R}^*}$ et sa dérivée est donnée par

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f'(x) = 6x - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}}$$

La fonction g est $\boxed{\text{définie sur } \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[}$. Elle est $\boxed{\text{dérivable sur } \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[}$ et sa dérivée est donnée par

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[, \qquad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}}$$

La fonction h est $\boxed{\text{définie et dérivable sur }]3, +\infty[}$ et sa dérivée est donnée par

$$\boxed{\forall x \in]3, +\infty[, \qquad h'(x) = \frac{1}{x-3}}$$

2. (DM1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}.$$

Démontrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,2]$.

Montrons par **récurrence** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathcal{P}(n) \qquad "u_n \in [0,2]"$$

est vraie.

- Initialisation. Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. D'après l'énoncé, $u_0 = 0 \in [0,2]$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité.

  On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire on suppose que

  $$u_n \in [0,2]$$

  Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que

  $$u_{n+1} \in [0,2]$$

  D'après l'hypothèse de récurrence, on a

  $$\begin{array}{lll} & 0 \leqslant u_n \leqslant 2 & \\ \text{donc} & 2 \leqslant 2+u_n \leqslant 4 & \\ \text{donc} & \sqrt{2} \leqslant \sqrt{2+u_n} \leqslant 2 & \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante sur } [0,+\infty[\\ \text{donc} & \sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2 & \text{d'après l'énoncé} \\ \text{donc} & 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2 & \end{array}$$

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion. Par principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in [0,2].}$$

3. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **géométrique**. Son terme général est donc donné par

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 1 \times 2^n = 2^n}$$

Vérification (à faire au brouillon, pas sur la copie). Pour $n = 0$, on obtient

$$u_0 = 2^0 = 1 \quad \checkmark$$

4. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = -1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 1$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **arithmétique**. Son terme général est donc donné par

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = -1 + 1 \times n = n - 1}$$

Vérification (à faire au brouillon, pas sur la copie). Pour $n = 0$, on obtient

$$u_0 = 0 - 1 = -1 \quad \checkmark$$

5. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{3}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **arithmético-géométrique**. Commençons par résoudre l'équation

$$\ell = \frac{3}{4}\ell + \frac{1}{3}$$

d'inconnue $\ell \in \mathbb{R}$. Raisonnons par **équivalence**. On a

$$\ell = \frac{3}{4}\ell + \frac{1}{3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{4}\ell = \frac{1}{3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ell = \frac{4}{3}$$

On considère maintenant une nouvelle suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_n - \frac{4}{3}$$

Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. <u>Soit</u> $n \in \mathbb{N}$. On a,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{4}{3} \\
&= \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \\
&= \frac{3}{4}u_n - 1 \\
&= \frac{3}{4}\left(u_n - \frac{4}{3}\right) \\
&= \frac{3}{4}v_n
\end{aligned}$$

Donc, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme

$$v_0 = u_0 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Puis, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = v_n + \tfrac{4}{3} = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{3}{4}\right)^n + \tfrac{4}{3}}$$

Vérification (à faire au brouillon, pas sur la copie). Pour $n = 0$, on obtient

$$u_0 = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \frac{4}{3} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2 \quad \checkmark$$

6. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \frac{1}{4}, \qquad u_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **récurrente linéaire d'ordre 2**. On commence donc par étudier son équation caractéristique donnée par

$$r^2 = r + 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r^2 - r - 2 = 0$$

C'est une équation du second degré dont le discriminant est donné par

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles données par

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1$$

Ainsi, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = A \times 2^n + B \times (-1)^n.$$

Pour déterminer les constantes A et B, on étudie les deux premiers termes de la suite. On a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} A+B & = & \frac{1}{4} \\ 2A-B & = & \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A+B & = & \frac{1}{4} \\ 3A & = & \frac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A+B & = & \frac{1}{4} \\ A & = & \frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} B & = & 0 \\ A & = & \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

On obtient donc que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \tfrac{1}{4} \times 2^n = 2^{n-2}}$$

Vérification (à faire au brouillon, pas sur la copie). Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient

$$u_0 = 2^{0-2} = \frac{1}{4} \ \checkmark \qquad \text{et} \qquad u_1 = 2^{1-2} = \frac{1}{2} \ \checkmark$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

a. $S_1 = \sum_{k=1}^{n}(2k-3)$ b. $S_2 = \sum_{k=1}^{n} 2^{k+1}$ c. $S_3 = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

a. Par **linéarité** de la somme, on obtient,

$$\begin{aligned}
\boxed{S_1} &= \sum_{k=1}^{n}(2k-3) \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 3 \\
&= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - 3 \times (n-1+1) \\
&= n(n+1) - 3n \\
&\boxed{= n^2 - 2n}
\end{aligned}$$

b. On reconnaît ici une somme **géométrique**. On a alors,

$$\begin{aligned}
\boxed{S_2} &= \sum_{k=1}^{n} 2^{k+1} \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} 2^k \\
&= 2 \times 2^1 \times \frac{1-2^{n-1+1}}{1-2} \\
&\boxed{= -4(1-2^n)}
\end{aligned}$$

c. On reconnaît ici une somme **télescopique**. On obtient donc,

$$\begin{aligned}
\boxed{S_3} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \\
&\boxed{= 1 - \tfrac{1}{n+1}}
\end{aligned}$$

8. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et lorsque c'est le cas, donner leur inverse.

a. $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b. $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ c. $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a. La matrice M_1 est de taille 2×2. On peut donc calculer son déterminant :

$$\det(M_1) = 1 \times 2 - 1 \times 3 = -1.$$

Comme $\det(M_1) \neq 0$, la matrice $\boxed{M_1 \text{ est donc inversible}}$ et son inverse vaut :

$$\boxed{M_1^{-1} = \tfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Vérification (à faire au brouillon, pas sur la copie). On a

$$M_1 \times M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \qquad \checkmark$$

b. La matrice M_2 est de taille 2×2. On peut donc calculer son déterminant :

$$\det(M_2) = 2\times 2 - 4\times 1 = 0$$

Comme $\det(M_1) = 0$, la matrice $\boxed{M_1 \text{ n'est pas inversible.}}$

c. La matrice M_3 est une matrice diagonale et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Donc la matrice $\boxed{M_3 \text{ est inversible}}$ et son inverse est donné par

$$\boxed{M_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$$

Vérification (à faire au brouillon, pas sur la copie). On a

$$M_3 \times M_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \qquad \checkmark$$

9. Déterminer la limite des suites suivantes.

a. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n} + \exp(n) + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ b. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+n}$ c. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\exp(n)+n^2}{n^2+\ln(n)}$

a. D'après les limites usuelles, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \exp(n) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \frac{1}{2} < 1$$

Donc, par somme, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et celle-ci vaut :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

b. Remarquons d'abord que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{2n^2\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{n}{2n^2}\right)} = 2\times\frac{1+\frac{1}{2n^2}}{1+\frac{n}{2n}}$$

Or, en utilisant les limites usuelles, on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{2n^2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} 1+\frac{n}{2n} = 1$$

Donc, par multiplication, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et celle-ci vaut :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}$$

c. Remarquons d'abord que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{\exp(n)}{n^2} \times \frac{1+\frac{n^2}{\exp(n)}}{1+\frac{\ln(n)}{n^2}}$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{\exp(n)} = 0 \text{ par croissances comparées et donc } \lim_{n\to+\infty} 1+\frac{n^2}{\exp(n)} = 1.$$

De même,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} = 0 \text{ par croissances comparées et donc } \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{\ln(n)}{n^2} = 1.$$

Enfin, par croissances comparées,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\exp(n)}{n^2} = +\infty$$

Donc, par multiplication, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et celle-ci vaut :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

Exercice 2 – On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$$

1. Calculer u_1.

   En utilisant la **relation de récurrence**, on a,

   $$\boxed{u_1} = u_0^2 - 2u_0 + 2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\times\frac{3}{2} + 2 \boxed{= \frac{5}{4}}$$

2. Écrire un programme Python qui calcule et affiche les 11 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (c'est-à-dire de u_0 à u_{10}).

```python
u = 3/2
print(u)
for k in range(1, 11):
            u=u**2-2*u+2
            print(u)
```

3. À l'aide des commentaires, recopier (sur votre copie) et compléter le programme suivant qui permet de créer une fonction, appelée `listesuite`, qui prend en argument un entier `n` et qui renvoie la liste de tous les termes de la suite (depuis u_0) jusqu'au terme de rang `n` (jusqu'à u_n).

```python
def listesuite(n):
    L=[]
    u = 3/2
    L.append(u)
    for k in range(1, n+1):
            u=u**2-2*u+2
            L.append(u)
    return L
```

4. On suppose qu'une fois le programme précédent complété de manière adéquate, la fonction `listesuite` évaluée en 5 renvoie la liste suivante.

```
[1.5, 1.25, 1.0625, 1.00390625,
1.0000152587890625, 1.0000000002328306]
```

   Que conjecture-t-on sur le caractère borné, la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

   On conjecture que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\boxed{\text{bornée}}$ (majorée par 1.5 et minorée par 1), que la suite est $\boxed{\text{décroissante}}$ et qu'elle $\boxed{\text{converge vers 1}}$.

5. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. En **développant** l'identité remarquable puis en utilisant **la relation de récurrence**, on a,

   $$\boxed{(u_n-1)^2+1} = u_n^2 - 2u_n + 1 + 1 = u_n^2 - 2u_n + 2 \boxed{= u_{n+1}}$$

(b) À l'aide de la question précédente, montrer par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in [1,2]$$

Montrons par **récurrence** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathcal{P}(n) \qquad "u_n \in [1,2]"$$

est vraie.

- Initialisation. Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. D'après l'énoncé, $u_0 = 3/2 \in [1,2]$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité.
  On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire on suppose que
  $$u_n \in [1,2]$$
  Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que
  $$u_{n+1} \in [1,2]$$
  D'après la *question* ***5a***, on a
  $$u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$$
  Or, d'après l'hypothèse de récurrence, on a
  $$\begin{array}{lll} & 1 \leqslant u_n \leqslant 2 & \\ \text{donc} & 0 \leqslant u_n - 1 \leqslant 1 & \\ \text{donc} & 0 \leqslant (u_n-1)^2 \leqslant 1 & \text{car la fct } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } [0,+\infty[\\ \text{donc} & 1 \leqslant (u_n-1)^2 + 1 \leqslant 2 & \\ \text{c-a-d} & 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2 & \text{d'après la } \textit{question } 5\text{a} \end{array}$$
  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion. Par principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire
  $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in [1,2].}$$

6. (a) Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant **la relation de récurrence**, on a,

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2$$

D'autre part, en développant, on obtient,

$$(u_n - 2)(u_n - 1) = u_n^2 - u_n - 2u_n + 2 = u_n^2 - 3u_n + 2$$

Donc finalement,

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)}$$

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *D'après la question* ***6a***, on a

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$$

Or, *d'après la question* ***5b***, on a

$$1 \leqslant u_n \leqslant 2$$

Donc, en particulier, on a

$$u_n - 2 \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad u_n - 1 \geqslant 0$$

Donc,

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1) \leqslant 0$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$

Donc, la $\boxed{\text{suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

7. (a) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie que l'on notera ℓ.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée (par 1, *d'après la question 5b*) et décroissante (*d'après la question 6b*). Donc, **par théorème de la limite monotone**, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une $\boxed{\text{limite finie}}$ que l'on note ℓ.

(b) Donner une équation vérifiée par la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la **relation de récurrence** suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$$

Or, *d'après la question 7a*, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Donc, en passant à la limite dans cette relation, on obtient,

$$\boxed{\ell = \ell^2 - 2\ell + 2}$$

(c) Donner un encadrement de la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'après la question 5b, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'inégalité suivante. Or, *d'après la question 7a*, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Donc, en passant à la limite dans cette relation, on obtient,

$$\boxed{1 \leqslant \ell \leqslant 2}$$

(d) Montrer qu'en fait la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\ell \leqslant \frac{3}{2}$$

D'après la question 6b, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant u_0 = \frac{3}{2}.$$

Or, *d'après la question 7a*, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Donc, en passant à la limite dans cette relation, on obtient,

$$\boxed{\ell \leqslant \tfrac{3}{2}}$$

(e) En déduire la valeur de la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'*d'après la question 7b*, la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de l'équation

$$\ell = \ell^2 - 2\ell + 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ell^2 - 3\ell + 2 = 0$$

C'est une **équation du second degré** dont le discriminant vaut $\Delta = 1 > 0$ donc l'équation admet deux racines réelles, qui sont 1 et 2. Or d'après la question 7d, la limite vérifie

$$\ell \leqslant \frac{3}{2}$$

Donc nécessairement, $\ell = 1$. Ainsi, la $\boxed{\text{suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 1.}}$

Exercice 3 – Adapté d'ECRICOME 2024. On considère la matrice M carrée de taille 3×3 dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 0, et dont tous les autres coefficients sont égaux à 1 :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note I_3 la matrice identité d'ordre 3.

Partie 1 - Inversibilité de M

1. Montrer que $(M+I_3)^2 = 3(M+I_3)$.

Tout d'abord, on peut calculer que :

$$M+I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis, en effectuant le produit matriciel, on obtient,

$$(M+I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3(M+I_3)$$

Finalement, on a montré que

$$\boxed{(M+I_3)^2 = 3(M+I_3)}$$

2. Développer les expressions littérales $(M+I_3)^2$ et $3(M+I_3)$.

En développant l'expression, on obtient directement que

$$\begin{aligned}\boxed{(M+I_3)^2} &= (M+I_3)(M+I_3) \\ &= M\cdot M + M\cdot I_3 + I_3\cdot M + I_3\cdot I_3 \\ &\boxed{= M^2 + 2M + I_3}\end{aligned}$$

De même, on obtient directement que,

$$\boxed{3(M+I_3) = 3M + 3I_3}$$

3. En déduire que
$$M^2 - M - 2I_3 = O_3.$$

D'après la question 1, on a,

$$(M+I_3)^2 = 3(M+I_3),$$

c'est-à-dire, *en utilisant la question 2*,

$$M^2 + 2M + I_3 = 3M + 3I_3$$

c'est-à-dire

$$\boxed{M^2 - M - 2I_3 = 0_3}$$

4. En déduire que la matrice M est inversible et déterminer son inverse.

En partant de la relation *obtenue à la question 3*, on a

$$M^2 - M - 2I_3 = 0_3 \quad \text{donc} \quad M^2 - M = 2I_3$$
$$\text{donc} \quad M(M - I_3) = 2I_3$$
$$\text{donc} \quad M \times \left[\frac{1}{2}(M - I_3)\right] = I_3$$

Ainsi,

$$\text{il existe une matrice} \quad B = \frac{1}{2}(M - I_3) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad \text{telle que} \quad MB = I_3.$$

Donc, la matrice M est inversible et son inverse est donné par

$$M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I_3)$$

En faisant le calcul, on obtient que,

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Vérification (à faire au brouillon, pas sur la copie).

$$M \cdot M^{-1} = M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \quad \checkmark$$

Partie 2 - Calcul des puissances de M

On considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Soient

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

Montrer que l'équation $PX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ admet une unique solution (que l'on explicitera en fonction de a, b et c).

Soients

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

On veut résoudre l'équation $PX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Pour cela, raisonnons par **équivalence** et résolvons le système linéaire qui apparaît grâce à la **méthode du pivot de Gauss**.

On a,

$$PX = B \iff \begin{cases} x + y + z = a \\ -x + z = b \\ -y + z = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = a \\ y + 2z = b + a \\ -y + z = c \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = a \\ y + 2z = b + a \\ 3z = a + b + c \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = a \\ y + 2z = b + a \\ z = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = a \\ y = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c \\ z = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c \\ y = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c \\ z = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c \end{pmatrix}$$

Donc, $\boxed{\text{l'équation } PX = B \text{ admet une unique solution}}$ donnée par

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}$$

Vérification (à faire au brouillon, pas sur la copie).

$$PX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = B \quad \checkmark$$

6. En déduire que P est inversible et que

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'*après la question 5*, pour tout $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, l'équation $PX = B$ admet une unique solution donnée par

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} B$$

Donc, $\boxed{\text{la matrice } P \text{ est inversible}}$ et son inversible est donné par

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Vérification (à faire au brouillon, pas sur la copie).

$$PP^{-1} = P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \quad \checkmark$$

7. On pose $D = P^{-1}MP$. Calculer la matrice D et montrer que D est une matrice diagonale.

En effectuant le calcul matriciel, on obtient,

$$\begin{aligned} \boxed{D} &= P^{-1}MP \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\boxed{= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

8. Justifier précisément que $M = PDP^{-1}$.

Par définition de la matrice D, on a

$$D = P^{-1}MP$$

En multipliant à gauche des deux côtés de cette égalité par la matrice P, on obtient

$$PD = PP^{-1}MP$$

Or, par définition de l'inverse $PP^{-1} = I_3$. Donc, on obtient,

$$PD = I_3MP$$

c'est-à-dire

$$PD = MP.$$

De même, en multipliant à droite des deux côtés de cette égalité par la matrice P^{-1}, on obtient

$$\boxed{PDP^{-1} = M}$$

9. Montrer par récurrence que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad M^k = PD^kP^{-1}$$

Raisonnons par **récurrence**. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$: " $M^k = PD^kP^{-1}$ "

- *Initialisation.* Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

  D'une part, $M^0 = I_3$ (par convention).

D'autre part, $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité.*

  Supposons que la propriété $\mathcal{P}(k)$ soit vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire supposons que
  $$M^k = PD^kP^{-1}$$
  Montrons que la propriété $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que
  $$M^{k+1} = PD^{k+1}P^{-1}$$

  On a
  $$\begin{aligned} M^{k+1} &= M^k \times M \\ &= PD^kP^{-1}M && \text{par hyp de récurrence} \\ &= PD^kP^{-1}PDP^{-1} && \text{cf question 8} \\ &= PD^kDP^{-1} \\ &= PD^{k+1}P^{-1} \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- *Conclusion.* Donc, par principe de récurrence, on a montré que
  $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad M^k = PD^kP^{-1}}$$

10. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'expression de D^k.

La matrice D étant diagonale (*cf question 7*), on peut montrer par une **récurrence** immédiate que
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}}$$

11. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'expression de M^k.

Soit $k \in \mathbb{N}$. *En utilisant les questions 9 et 10* et en effectuant le produit matriciel, on obtient que
$$\begin{aligned} \boxed{M^k} &= PD^kP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^k & (-1)^k & 2^k \\ (-1)^{k+1} & 0 & 2^k \\ 0 & (-1)^{k+1} & 2^k \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\boxed{= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^k + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k \\ (-1)^{k+1} + 2^k & -2(-1)^{k+1} + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k \\ (-1)^{k+1} + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k & -2(-1)^{k+1} + 2^k \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Vérification (à faire au brouillon, pas sur la copie). Pour $k = 0$, on obtient,
$$M^0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I_3 \quad \checkmark$$
On peut aussi vérifier que pour $k = 1$, on retombe bien sur l'expression de la matrice M.

12. On admet qu'il existe, pour tout $k \in \mathbb{N}$, deux réels a_k et b_k tels que

$$M^k = a_k M + b_k I_3.$$

Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'expression de a_k et b_k.

Soit $k \in \mathbb{N}$. D'une part, *en utilisant la question 11*, on a

$$M^k = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^k + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k \\ (-1)^{k+1} + 2^k & -2(-1)^{k+1} + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k \\ (-1)^{k+1} + 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k & -2(-1)^{k+1} + 2^k \end{pmatrix}$$

D'autre part, en effectuant le calcul, on obtient

$$a_k M + b_k I_3 = \begin{pmatrix} b_k & a_k & a_k \\ a_k & b_k & a_k \\ a_k & a_k & b_k \end{pmatrix}$$

En identifiant les coefficients des deux matrices, l'égalité $M^k = a_k M + b_k I_3$ implique que les coefficients a_k et b_k valent

$$\boxed{a_k = \frac{1}{3}\left((-1)^{k+1} + 2^k\right)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{b_k = \frac{1}{3}\left(2(-1)^k + 2^k\right)}$$

13. (Question ouverte) La formule de la question 12 peut-elle être étendue à $k = -1$?

D'après la question 4, on a

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Or, si on étend la définition des coefficients $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à des entiers négatifs, on obtient

$$a_{-1} = \frac{1}{3}\left((-1)^{-1+1} + 2^{-1}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{-1} = \frac{1}{3}\left(2(-1)^{-1} + 2^{-1}\right) = -\frac{1}{2}$$

Et donc,

$$a_{-1}M + b_{-1}I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = M^{-1}$$

$\boxed{\text{On peut donc étendre la formule de la question 12 à } k = -1.}$

14. (Question ouverte) À la question 3, on a montré que le polynôme $x \mapsto x^2 - x - 2$ étant un polynôme annulateur de la matrice M. Quel lien peut-on faire entre ce polynôme et les coefficients de la matrice diagonale D trouvés à la question 7 ?

Les $\boxed{\text{coefficients}}$ de la matrice D sont exactement les $\boxed{\text{racines du polynôme annulateur}}$ de la matrice M. En effet, le polynôme $x \mapsto x^2 - x - 2$ est un polynôme de second degré. Son discriminant est donné par $\Delta = 9 > 0$, donc ce polynôme admet deux racines réelles qui sont données par -1 et 2, qui sont exactement les coefficients de la matrice D.