13 Outils pour les probabilités

1 La factorielle et les permutations

1.1 Rappels sur la factorielle

Définition 1.1 La *factorielle* d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n.$$

Par convention, $0! = 1$.

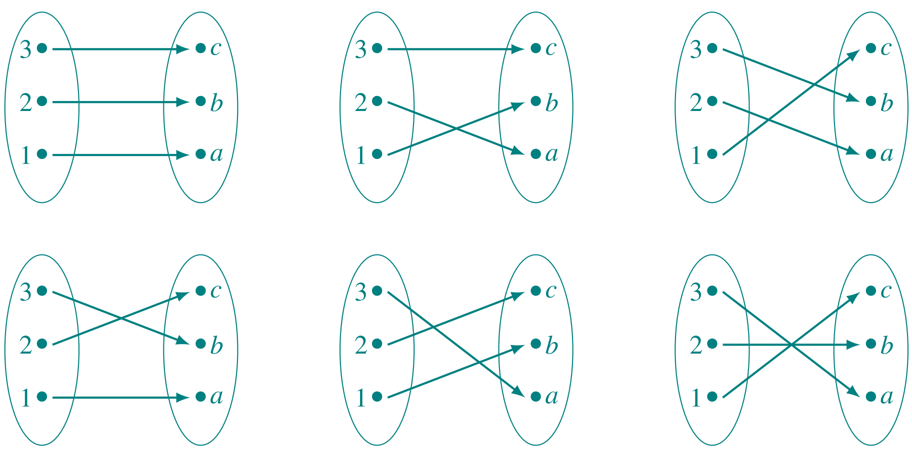
Exemple 1.2 On a

$0!$	$1!$	$2!$	$3!$	$4!$
1	1	$1 \times 2 = 2$	$1 \times 2 \times 3 = 6$	$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

1.2 Permutations

Définition 1.3 On appelle **permutation** toute bijection entre deux ensembles finis de même cardinal (c'est-à-dire qui ont le même nombre d'éléments).

Exercice 1.4 Représenter toutes les bijections possibles entre les ensembles $\{1,2,3\}$ et $\{a,b,c\}$.



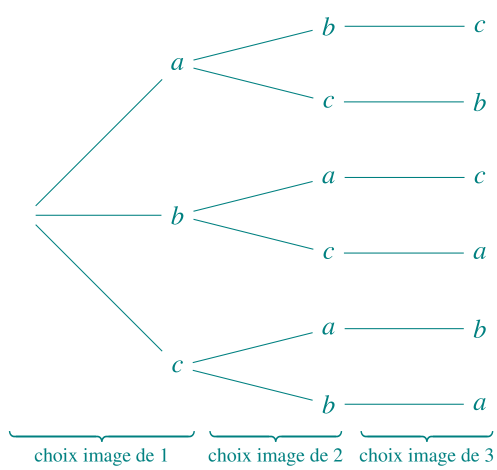
Expliquons comment lister les bijections de $\{1,2,3\}$ vers $\{a,b,c\}$ méthodiquement.

- On commence par choisir l'image de 1 : soit a, soit b, soit c (trois possibilités).
- Puis on choisit l'image de 2. Comme l'application doit être bijective, son image doit être différente de celle de 1. Il ne reste donc que deux possibilités.
- Puis on choisit l'image de 3. Comme l'application doit être bijective, son image doit être différente de celle de 1 et de celle de 2. Il ne reste donc plus qu'une seule possibilité.

En tout, il y a donc

$$3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$$

bijections possibles.



? De manière informelle, le nombre de permutations d'un ensemble est le nombre de façons différentes d'ordonner les éléments d'un ensemble.

Exemple 1.5 Trois élèves, Paul, Pierre et Jacques, doivent passer en colle d'anglais. Quels sont les différents ordres de passage possible ? Combien y'en a-t-il ?

Listons toutes les possibilités.

Paul - Pierre - Jacques	Jacques - Paul - Pierre	Jacques - Pierre - Paul
Pierre - Jacques - Paul	Paul - Pierre - Jacques	Paul - Jacques - Pierre

En fait,

- On commence par choisir le créneau de Pierre : il y a trois possibilités (passer en premier, en deuxième ou en troisième)
- Une fois le créneau de Pierre choisi, on choisit le créneau de Paul parmi les créneaux restants : il n'y a donc plus que deux possibilités (puisque Pierre prend déjà un créneau)
- enfin, le dernière élève, Jacques, n'a plus de choix, il prend le dernier créneau restant.

On obtient donc

$$3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ permutations possibles.}$$

Proposition 1.6 Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$.

Idée de preuve. Dans un ensemble à n éléments,

- on a n choix pour le premier élément à placer,
- une fois le premier élément placé, il reste $n-1$ choix de places restantes pour le deuxième élément (vu que le premier élément occupe déjà une place)
- ...
- puis deux choix pour l'avant dernier élément,
- puis un choix pour le dernier élément.

Finalement, le nombre d'options est

$$n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$$

■

2 Les coefficients binomiaux et les combinaisons

2.1 Combinaison

Définition 2.1 — Combinaison. Soient E un ensemble fini de cardinal n et $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leqslant n$. On appelle **combinaison** de E à k éléments le nombre de sous-ensembles de E de cardinal k, c'est-à-dire possédant k éléments. Ce nombre est alors noté

$$\binom{n}{k}$$

et appelé **coefficient binomial** k parmi n.

Exemple 2.2 Intéressons nous à l'ensemble suivant

$$E = \{1, 2, 3\}.$$

1. Quel est le nombre de sous-ensemble à 0 élément ? En faire la liste.

$$\emptyset$$

2. Quel est le nombre de sous-ensemble à 1 élément ? En faire la liste.

$$\{1\} \qquad \{2\} \qquad \{3\}$$

3. Quel est le nombre de sous-ensemble à 2 éléments ? En faire la liste.

$$\{1,2\} \qquad \{1,3\} \qquad \{2,3\}$$

4. Quel est le nombre de sous-ensemble à 3 éléments ? En faire la liste.

$$\{1,2,3\}$$

5. En déduire les valeurs suivantes des coefficients binomiaux.

$$\binom{3}{0} = 1 \qquad \binom{3}{1} = 3 \qquad \binom{3}{2} = 3 \qquad \binom{3}{3} = 1$$

Exemple 2.3 Intéressons nous à l'ensemble suivant

$$E = \{a, b, c, d, e\}.$$

1. Quel est le nombre de sous-ensemble à 1 élément ? En faire la liste.

$$\{a\} \qquad \{b\} \qquad \{c\} \qquad \{d\} \qquad \{e\}$$

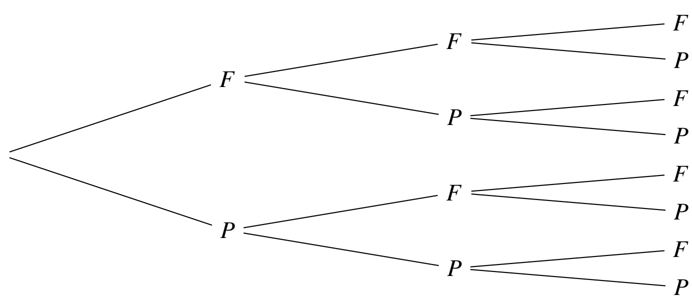
2. Quel est le nombre de sous-ensemble à 2 éléments ? En faire la liste.

$$\{a,b\} \quad \{a,c\} \quad \{a,d\} \quad \{a,e\} \quad \{b,c\} \quad \{b,d\} \quad \{b,e\} \quad \{c,d\} \quad \{c,e\} \quad \{d,e\}$$

3. En déduire les valeurs suivantes des coefficients binomiaux.

$$\binom{5}{1} = 5 \qquad \binom{5}{2} = 10$$

! Le nombre $\binom{n}{k}$ peut aussi s'interpréter comme le nombre de façon (le nombre de chemin dans l'arbre de probabilité) d'obtenir k fois pile lors de n lancers d'une pièce. Par exemple, l'arbre de probabilité pour trois lancers de pièces est le suivant



On obtient alors

$$\binom{3}{0} = 1 \qquad \binom{3}{1} = 3 \qquad \binom{3}{2} = 3 \qquad \binom{3}{3} = 1$$

2.2 Calcul effectif des coefficients binomiaux

Proposition 2.4 Soient $n, k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, car, par exemple, on ne peut pas trouver un sous-ensemble de cardinal 15 d'un ensemble qui contient seulement 10 éléments...

Exemple 2.5 En utilisant cette formule, on obtient :

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \times (3-2)!} = \frac{1 \times 2 \times 3}{1 \times 2 \times 1} = 3 \qquad \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times (5-3)!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 1 \times 2} = 10$$

Proposition 2.6 — Cas particuliers à connaître. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n.$$

On a
- $\binom{n}{0} = 1$ car, pour tout ensemble contenant n éléments, il n'y a qu'un seul sous-ensemble contenant zéro élément qui est l'ensemble vide ;
- $\binom{n}{n} = 1$ car, pour tout ensemble contenant n éléments, il n'y a qu'un seul sous-ensemble contenant n éléments qui est l'ensemble tout entier ;
- $\binom{n}{1} = n$ car, pour tout ensemble contenant n éléments, il y a exactement n sous-ensembles contenant 1 élément.

On a l'habitude de représenter les coefficients binomiaux dans un tableau, avec l'entier n en ligne et l'entier k en colonne. Ainsi, la valeur du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ se trouve à l'intersection de la n-ième ligne et k-ième colonne. Pour remplir les cases de ce tableau, on utilise la **formule de Pascal** qui permet de déduire une ligne de la précédente.

Proposition 2.7 — Formule de Pascal. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

$n = 0$	1						
$n = 1$	1	1					
$n = 2$	1	2	1				
$n = 3$	1	3	3	1			
$n = 4$	1	4	6	4	1		
$n = 5$	1	5	10	10	5	1	
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1
k :	0	1	2	3	4	5	6

$n = 0$							1						
$n = 1$						1		1					
$n = 2$					1		2		1				
$n = 3$				1		3		3		1			
$n = 4$			1		4		6		4		1		
$n = 5$		1		5		10		10		5		1	
$n = 6$	1		6		15		20		15		6		1
k :	0		1		2		3		4		5		6

Exemple 2.8 Sur le tableau, on peut lire les valeurs suivantes :

$$\binom{5}{2} = 10, \qquad \binom{3}{2} = 3, \qquad \binom{4}{3} = 4.$$

On remarque une symétrie dans le tableau, donnée par la formule suivante.

Proposition 2.9 — Symétrie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Exemple 2.10 On a

$$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \times 9}{2} = 45.$$

2.3 Formule du binôme de Newton

Proposition 2.11 — Formule du binôme de Newton. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Autrement dit,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

! Les coefficients binomiaux apparaissant dans la formule sont ceux correspondant à la ligne n du tableau du triangle de Pascal. De plus, les puissances de b augmentent quand celles de a diminuent, et la somme des puissances vaut toujours n.

Exemple 2.12 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Développer les expressions données.

Exemple	Coeff. Bin. associés	Développement
$(a+b)^2$	1 2 1	$a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)^3$	1 3 3 1	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^3$	1 3 3 1	$a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1	$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a-b)^5$	1 5 10 10 5 1	$a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

Exemple 2.13 Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $(2x+1)^3$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(2x+1)^3 &= (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (2x) \cdot 1^2 + 1^3 \\ &= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1\end{aligned}$$

Exemple 2.14 Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $(x-3)^3$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(x-3)^3 &= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot (-3) + 3 \cdot x \cdot (-3)^2 + (-3)^3 \\ &= x^3 - 9x^2 + 27x - 27\end{aligned}$$

Exercice 2.15 — Autour de la loi binomiale. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. On pose,

$$\forall k \in \{0,\ldots,n\}, \qquad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la **formule du binôme de Newton**, on a,

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (1-p+p)^n = 1^n = 1.$$

Exercice 2.16 — Ecricome 2012, Maths S. Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* n, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (x-1)^r$$

- *Première méthode ("de la droite vers la gauche").* Soient $n \in \mathbb{N}^* n$ et $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule du **binôme de Newton**, on a,

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (x-1)^r = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (x-1)^r 1^{n-r} = (x-1+1)^n = x^n$$

- *Deuxième méthode ("de la gauche vers la droit").* Soient $n \in \mathbb{N}^* n$ et $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule du **binôme de Newton**, on a,

$$x^n = (x-1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (x-1)^r 1^{n-r} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (x-1)^r$$

Preuve du binôme de Newton. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On montre par **récurrence** que la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathcal{P}(n) : \text{« } (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \text{ »} \qquad \text{est vraie}$$

• *Initialisation :* Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k.$$

- D'une part, $(a+b)^0 = 1$.
- D'autre part,

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1.$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• *Hérédité :* On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k}.$$

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b^k a^{n+1-k}.$$

On a,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= a(a+b)^n + b(a+b)^n \\
&= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b^k a^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b^k a^{n-k} && \text{par hyp. de rec.} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b^{k+1} a^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b^k a^{n-k+1} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n}{\ell-1} b^{\ell} a^{n-\ell+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b^k a^{n-k+1} && \text{changement d'indice} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1} b^{k} a^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b^k a^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1} b^{k} a^{n-k+1} + b^{n+1}a^0 + b^0 a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} b^k a^{n-k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) b^k a^{n-k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} b^k a^{n-k+1} + b^{n+1} && \text{formule de Pascal} \\
&= \binom{n+1}{0} b^0 a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} b^k a^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} a^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} b^k a^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• *Conclusion :* D'après le principe de récurrence, la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b^k a^{n-k}.$$

■

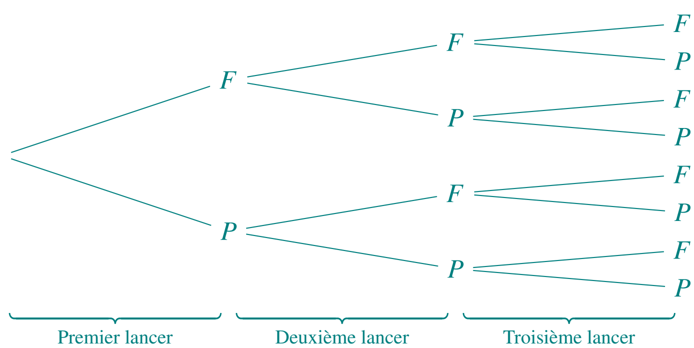
3 Situations de dénombrement en probabilités

Exercice 3.1 On lance trois fois d'affilée une pièce donnant Pile (P) ou Face (F) ($\approx$ tirage *avec remise*) On s'intéresse à l'issue possible de ces trois lancers. Par exemple, l'issue PFP correspond à trois lancers pour lesquels on a obtenu Pile puis Face puis Pile.

1. Combien d'issues différentes obtient-on au total ?
2. Combien d'issues différentes correspondent à l'obtention d'un pile au premier lancer ?
3. Combien d'issues différentes correspondent à l'obtention exactement un pile au cours des trois lancers ?
4. Combien d'issues différentes correspondent à l'obtention d'au moins un pile au cours des trois lancers ?
5. Combien d'issues différentes correspondent à l'obtention d'un Pile au premier lancer et d'un Face au deuxième lancer ?
6. Combien d'issues différentes correspondent à l'obtention d'un pile au cours des trois lancers sachant qu'on a obtenu Face au premier lancer ?

On pourra représenter la situation sur un arbre de probabilité et dans chacun des cas, lister toutes les possibilités.

Représentons la situation sur un arbre de probabilité. Situation de tirage *avec remise*.



1. Nombre d'issues différentes au total :

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

2. Nombre d'issues différentes correspondent à l'obtention d'un pile au premier lancer :

$$1 \times 2 \times 2 = 4 \qquad \text{(PFF - PFP - PPF - PPP)}$$

3. Nombre d'issues différentes correspondent à l'obtention exactement un pile au cours des trois lancers (plusieurs cas selon la *place* du pile) :

$$1 \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 1 = 3 \qquad \text{(PFF - FPF - FFP)}$$

4. Nombre d'issues différentes correspondent à l'obtention d'au moins un pile au cours des trois lancers (on passe par l'évènement *contraire*) :

$$8 - 1 = 7$$

5. Nombre d'issues différentes correspondent à l'obtention d'un Pile au premier lancer et d'un Face au deuxième lancer :

$$1 \times 1 \times 2 = 2 \qquad \text{(PFP - PFF)}$$

6. Nombre d'issues différentes correspondent à l'obtention d'un pile au cours des trois lancers sachant qu'on a obtenu Face au premier lancer :

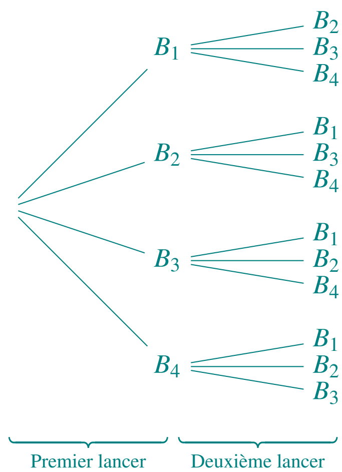
$$1 \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 1 = 2 \qquad \text{(FPF - FFP)}$$

Exercice 3.2 Une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4. On tire deux boules. On s'intéresse à l'issue possible de ces deux tirages. Par exemple, l'issue B_1B_3 correspond à deux tirages pour lesquels on a obtenu la boule numéro 1 (au premier tirage) puis la boule numéro 3 (au deuxième tirage). Déterminer le nombre d'issues total et le nombre d'issues correspondant à l'obtention de deux boules de numéro paire dans chacun des deux cas.

1. On tire les deux boules l'une après l'autre, sans remettre dans l'urne la première boule tirée (≈ tirage *sans remise*).
2. On tire la première boule et on la remet dans l'urne avant de tirer la deuxième boule (≈ tirage *avec remise*).

On pourra représenter la situation sur un arbre de probabilité et dans chacun des cas, lister toutes les possibilités.

- Représentons la situation sur un arbre de probabilité dans la situation de tirage *sans remise*.



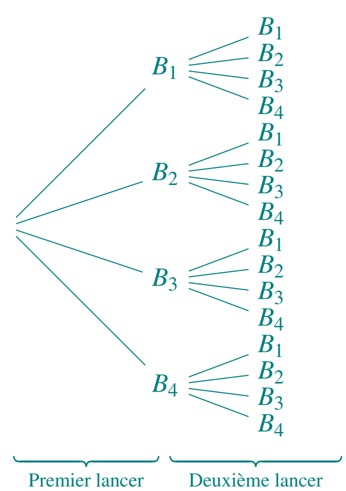
1. Nombre d'issues totales :

$$4 \times 3 = 12$$

2. Nombre d'issues avec deux numéros pairs :

$$2 \times 1 = 2 \qquad (\mathrm{B}_2\mathrm{B}_4 \text{ - } \mathrm{B}_4\mathrm{B}_2)$$

- Représentons la situation sur un arbre de probabilité dans la situation de tirage *avec remise*.



1. Nombre d'issues totales :

$$4 \times 4 = 16$$

2. Nombre d'issues avec deux numéros pairs :

$$2 \times 2 = 4 \qquad (\mathrm{B}_2\mathrm{B}_4 \text{ - } \mathrm{B}_4\mathrm{B}_2 \text{ - } \mathrm{B}_4\mathrm{B}_4 \text{ - } \mathrm{B}_2\mathrm{B}_2)$$