TD 13 – Outils pour les probabilités

Sur la factorielle

Exercice 1 – Calculer les nombres suivants :

a) $5!$ b) $\dfrac{8!}{6!}$ c) $\dfrac{500!}{499!}$ d) $\dfrac{8!}{6!2!}$

a) $5! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5$

$= 120$

b) $\dfrac{8!}{6!} = \dfrac{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{4}\times\cancel{5}\times\cancel{6}\times 7\times 8}{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{4}\times\cancel{5}\times\cancel{6}}$

$= 7\times 8$

$= 56$

c) $\dfrac{500!}{499!} = \dfrac{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cancel{\dots}\times\cancel{499}\times 500}{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cancel{\dots}\times\cancel{499}}$

$= 500$

d) $\dfrac{8!}{6!\times 2!} = \dfrac{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{4}\times\cancel{5}\times\cancel{6}\times 7\times\cancel{8}^{4}}{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{4}\times\cancel{5}\times\cancel{6}\times 1\times\cancel{2}}$

$= 7\times 4$

$= 28$

Exercice 2 – Écrire les nombres suivants en utilisant des factorielles :

a) $5\times6\times7\times8\times9$ b) $(n-2)(n-1)n$ c) $2\times4\times6\times\cdots\times(2n)$ d) $1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1)$

a) $5\times6\times7\times8\times9 = \dfrac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9}{1\times2\times3\times4}$

$= \dfrac{9!}{4!}$

b) $n(n-1)(n-2) = \dfrac{1\times2\times\ldots\times(n-3)\times(n-2)\times(n-1)\times n}{1\times2\times\ldots\times(n-3)}$

$= \dfrac{n!}{(n-3)!}$

c) $2\times4\times6\times\ldots\times(2n) = 2\times1\times2\times2\times2\times3\times\ldots\times2\times n$

$= 2^n\times1\times2\times3\times\ldots\times n$

$= 2^n\times n!$

d) $1\times3\times5\times\ldots\times(2n+1) = \dfrac{1\times2\times3\times4\times\ldots\times(2n)\times(2n+1)}{2\times4\times\ldots\times(2n)}$

$= \dfrac{(2n+1)!}{2^n\times n!}$

en utilisant la question c)

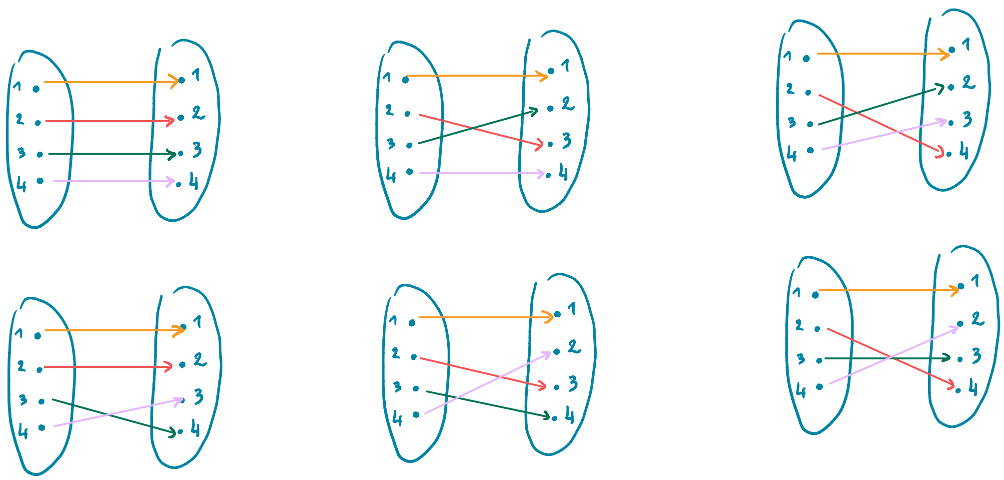
Exercice 3 – Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Combien y'a-t-il d'applications bijectives de $\{1,2,3,4\}$ vers $\{1,2,3,4\}$ qui envoie 1 sur 1. Les lister/les représenter.
2. Combien y'a-t-il d'applications injectives de $\{1,2\}$ vers $\{1,2,3\}$? Les lister/les représenter.
3. Combien y'a-t-il d'applications surjectives de $\{1,2,3\}$ vers $\{1,2\}$? Les lister/les représenter. *On pourra commencer par compter les applications non surjectives.*

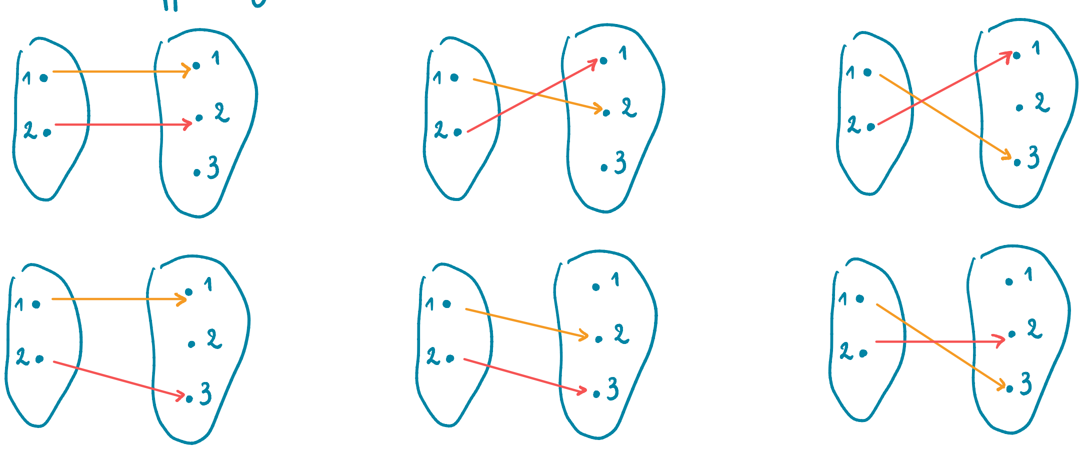
1. Nbre d'app bijectives de $\{1,2,3,4\}$ vers $\{1,2,3,4\}$ tq $1 \rightarrow 1$:

$$\underbrace{1}_{\text{choix de l'image de 1 imposé (vaut 1)}} \times \underbrace{3}_{\text{choix de l'image de 2 (qui doit être} \neq \text{de l'image de 1 donc vaut 2 ou 3 ou 4)}} \times 2 \times 1 = 6$$

2 : choix de l'image de 3 (qui doit être $\neq$ de l'image de 1 et de celle de 2)



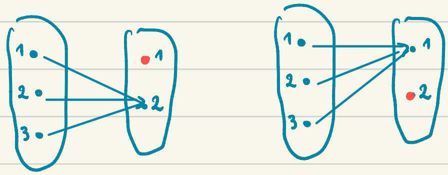
2. Nbre d'app injectives de $\{1,2\}$ vers $\{1,2,3\}$: 6



3. Nbre d'app de $\{1,2,3\}$ vers $\{1,2\}$:

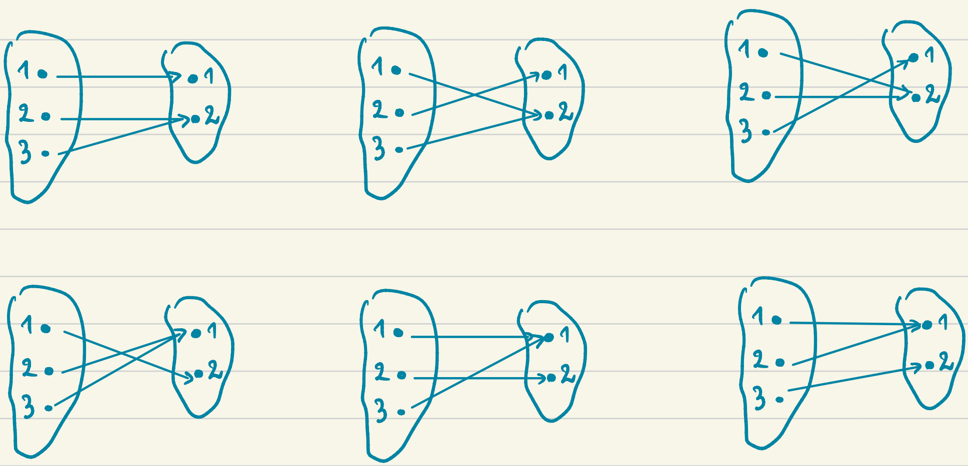
$$\underbrace{2}_{\text{choix de l'image de 1 (1 ou 2)}} \times \underbrace{2}_{\text{choix de l'image de 2 (1 ou 2)}} \times \underbrace{2}_{\text{choix de l'image de 3 (1 ou 2)}} = 8$$

Nbre d'app non surjectives de $\{1,2,3\}$ vers $\{1,2\}$:
2



<u>soit</u> 1 n'a pas d'antécédent
alors 1, 2 et 3 sont envoyés sur 2
<u>soit</u> 2 n'a pas d'antécédent
alors 1, 2,3 sont envoyés sur 1
<u>soit</u> 1, 2 n'ont pas d'antécédent
alors impossible car 1,2,3 doivent être envoyés quelque part

Nbre d'app surjectives de $\{1,2,3\}$ vers $\{1,2\}$:
$8 - 2 = 6$



Coefficients binomiaux

Exercice 4 – Calculer les coefficients binomiaux ci-dessous.

a. $\binom{7}{0}$ b. $\binom{8}{8}$ c. $\binom{25}{1}$ d. $\binom{25}{2}$ e. $\binom{25}{23}$ f. $\binom{10}{6}$

a. $\binom{7}{0} = \frac{7!}{0! \times (7-0)!} = \frac{7!}{1 \times 7!} = 1$

b. $\binom{8}{8} = \frac{8!}{8!\,(8-8)!} = \frac{\cancel{8!}}{\cancel{8!}\ 0!} = 1$

c. $\binom{25}{1} = \frac{25!}{1!\,(25-1)!} = \frac{25!}{1!\ 24!} = \frac{\cancel{1} \times \cancel{2} \times \cancel{\dots} \times \cancel{24} \times 25}{1 \times \cancel{1} \times \cancel{2} \times \cancel{\dots} \times \cancel{24}} = 25$

d. $\binom{25}{2} = \frac{25!}{2!\,(25-2)!} = \frac{25!}{2!\ 23!} = \frac{\cancel{1} \times \cancel{2} \times \cancel{\dots} \times \cancel{23} \times 24 \times 25}{1 \times 2 \times \cancel{1} \times \cancel{2} \times \cancel{\dots} \times \cancel{23}} = \frac{24 \times 25}{2} = 12 \times 25 = 300$

e. $\binom{25}{23} = \binom{25}{25-23}$ par symétrie

$= \binom{25}{2}$

$= 300$ cf question d.

f. $\binom{10}{6} = \frac{10!}{6!\ 4!} = \frac{1 \times 2 \times \dots \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}{1 \times 2 \times \dots \times 6 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{7 \times \cancel{8}^{4} \times \cancel{9}^{3} \times 10}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{4}} = 7 \times 3 \times 10 = 210$

Exercice 5 – Soit $n \geqslant 3$. Calculer les trois quantités suivantes en fonction de n.

a. $\binom{n}{1}$ b. $\binom{n}{2}$ c. $\binom{n}{3}$

Soit $n \geqslant 3$.

a. $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!(n-1)!}$

$= \dfrac{\cancel{1} \times \cancel{2} \times \cancel{\dots} \times \cancel{(n-1)} \times n}{1 \times \cancel{1} \times \cancel{2} \times \cancel{\dots} \times \cancel{(n-1)}}$

$= n$

b. $\binom{n}{2} = \dfrac{n!}{2!(n-2)!}$

$= \dfrac{\cancel{1} \times \cancel{2} \times \cancel{\dots} \times \cancel{(n-2)} \times (n-1) \times n}{1 \times 2 \times \cancel{1} \times \cancel{2} \times \cancel{\dots} \times \cancel{(n-2)}}$

$= \dfrac{(n-1)n}{2}$

c. $\binom{n}{3} = \dfrac{n!}{3!(n-3)!}$

$= \dfrac{(n-2)(n-1)n}{6}$ après simplifications

Exercice 6 – À l'aide du triangle de Pascal, donner la valeur des coefficients binomiaux

$$\binom{6}{k} \qquad \text{pour tout } k \in \{0, \ldots, 6\}$$

Triangle de Pascal :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1

On en déduit que :

$\binom{6}{0} = 1 \quad \binom{6}{1} = 6 \quad \binom{6}{2} = 15 \quad \binom{6}{3} = 20 \quad \binom{6}{4} = 15 \quad \binom{6}{5} = 6 \quad \binom{6}{6} = 1$

Exercice 7 – Trouver un moyen efficace pour calculer les nombres suivants.

a. $\binom{8}{4}+\binom{8}{5}$ b. $\binom{10}{3}+2\binom{10}{4}+\binom{10}{5}$

a. D'après la formule de Pascal,

$$\binom{8}{4}+\binom{8}{5}=\binom{8}{5-1}+\binom{8}{5}$$
$$=\binom{9}{5}$$
$$=\frac{9!}{5!\,4!}$$
$$=\frac{6\times7\times\cancel{8}^{4}\times\cancel{9}^{3}}{1\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{4}}$$
$$=6\times7\times3$$
$$=126$$

b. D'après la formule de Pascal,

$$\binom{10}{3}+2\binom{10}{4}+\binom{10}{5}=\underbrace{\binom{10}{3}+\binom{10}{4}}+\underbrace{\binom{10}{4}+\binom{10}{5}}$$
$$=\underbrace{\binom{11}{4}+\binom{11}{5}}$$
$$=\binom{12}{5}$$
$$=\frac{12!}{5!\,7!}$$
$$=\frac{8\times9\times\cancel{10}\times11\times\cancel{12}}{1\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{4}\times\cancel{5}}$$
$$=8\times9\times11$$

Exercice 8 – Simplifier au maximum les quantités suivantes.

a. $\dfrac{n!}{(n+1)!}$ b. $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$ c. $\dfrac{\binom{n+1}{n}}{\binom{n}{1}}$ d. $\dfrac{\binom{n}{p}}{\binom{n-1}{p-1}}$

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = 2n \times (2n+1)$$

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\frac{\binom{n+1}{n}}{\binom{n}{1}} = \frac{\frac{(n+1)!}{n!\,(n+1-n)!}}{\frac{n!}{1!\,(n-1)!}}$$

$$= \frac{(n+1)!}{n!\,1!} \times \frac{1!\,(n-1)!}{n!}$$

$$= (n+1) \times \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n+1}{n}$$

d. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \leq n$. On a :

$$\frac{\binom{n}{p}}{\binom{n-1}{p-1}} = \frac{\frac{n!}{p!\,(n-p)!}}{\frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-1-(p-1))!}}$$

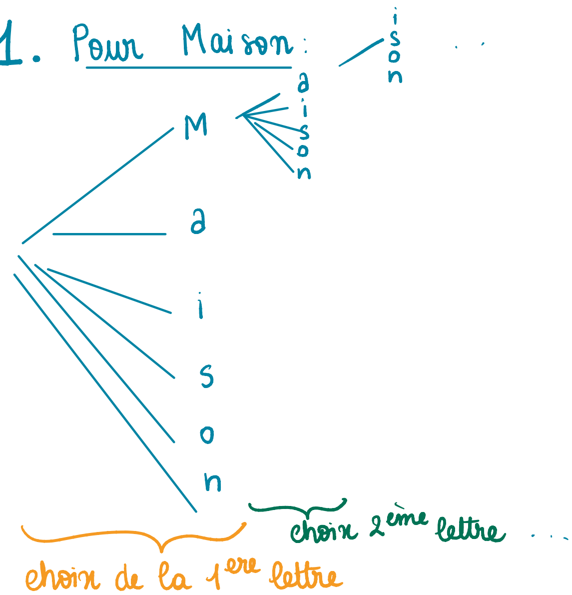
$$= \frac{n!}{p!\,\cancel{(n-p)!}} \times \frac{(p-1)!\,\cancel{(n-p)!}}{(n-1)!}$$

$$= \frac{n}{p}$$

Exercice 9 – Lien coefficients binomiaux/factorielles et dénombrement. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Combien existe-t-il d'anagrammes de "Maison", de "Mississipi" et de "Abracadabra" ?
2. Dans un groupe de n personnes, tout le monde se serre la main. Quel est le nombre de poignées de mains ? *On pourra commencer par comprendre ce qu'il se passe pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$,...*
3. Quatre athlètes participent à une finale olympique. Combien de classements sont possibles pour cette finale.

1. Pour Maison :

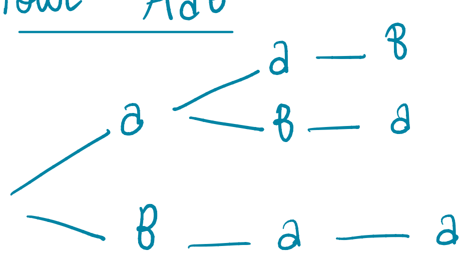


Total des possibilités

$6\times5\times4\times3\times2\times1 = 6!$

Quand des lettres se répètent...

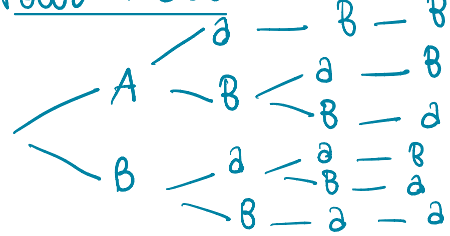
▶ Pour AaB



Total :

$$\underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{on place les 2 "a" parmi les 3 emplacements}} \times \underbrace{\binom{1}{1}}_{\text{on place le "B" dans l'emplacement restant}} = \frac{3!}{2!}$$

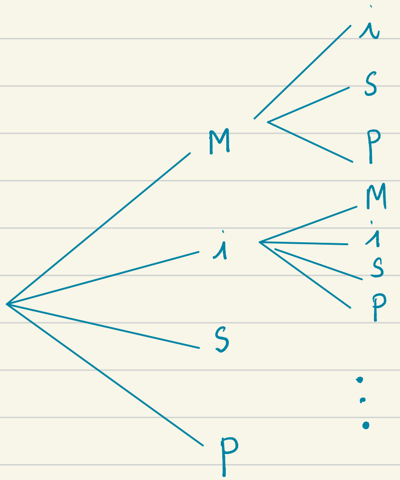
▶ Pour AaBB



Total :

$$\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{on place les 2 "a" parmi les 4 emplacements}} \times \underbrace{\binom{2}{2}}_{\text{on place les 2 "B" dans les 2 emplacements restants}} = \frac{4!}{2!\times2!}$$

Pour Missi ssipi (! aux lettres en double)



10 lettres dont 1 m
4 i
4 s
1 p

Total des possibilités

$$\underbrace{\binom{10}{4}}_{\text{on place les 4 "i"}} \times \underbrace{\binom{6}{4}}_{\text{puis les 4 "s"}} \times \underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{puis le "m"}} \times \underbrace{\binom{1}{1}}_{\text{puis le "p"}} = \frac{10!}{4! \times 4!}$$

Pour abracadabra

11 lettres dont 5 a
2 b
2 r
1 c
1 d

Au total

$$\binom{11}{5} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = \frac{11!}{5!\,2!\,2!}$$

2. $$\underbrace{(n-1)}_{\text{la 1ière personne sert } n-1 \text{ mains}} + (n-2) + \dots \underbrace{+\,1}_{\text{l'avant dernière pers, } n-1 \text{ ième sert 1 main}} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

3. $4!$

Exercice 10 – Lien coefficients binomiaux et dénombrement. On tire 5 cartes dans un jeu de 52 cartes. Combien de tirages vérifient les conditions suivantes ?

1. Aucune condition supplémentaire.
2. Il y a au moins une carte pique parmi les cinq cartes.
3. Il y a exactement deux valets.
4. Il y a exactement un as et deux carreaux.
5. Les cinq cartes sont de la même couleur.

1. Choix de 2 cartes parmi 52 : $\binom{52}{2}$

2. $\underbrace{\binom{13}{1}}_{\text{choix d'une carte pique parmi les 13 pique}} \times \underbrace{\binom{51}{4}}_{\text{choix des 4 cartes parmi les 51 restantes}}$

3. $\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{choix des 2 valets parmi les 4}} \underbrace{\binom{48}{3}}_{\text{choix des 3 cartes restantes parmi dans le jeu sans les valets}}$

4. $\underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{choix d'un as qui n'est pas carreau}} \underbrace{\binom{13}{2}}_{\text{choix de 2 cartes carreau}} \underbrace{\binom{36}{2}}_{\text{choix de 2 cartes restantes dans le jeu sans les as (4 cartes) et sans les carreaux (13-1 cartes car on a déjà enclu l'as de carreau}}$

$+ \underbrace{\binom{1}{1}}_{\text{choix de l'as de carreau}} \underbrace{\binom{12}{1}}_{\text{choix d'une carte carreau sauf l'as}} \underbrace{\binom{36}{3}}_{\text{choix de 3 cartes restantes (pas as ni carreau)}}$

5. $\underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{choix d'une des quatre couleurs}} \times \underbrace{\binom{13}{5}}_{\text{choix des 5 cartes de la même couleurs}}$

Autour du binôme de Newton

Exercice 11 – Développement. Soient $x, a, b \in \mathbb{R}$. Développer les quantités suivantes

a. $(a+b)^6$ b. $(2-x)^5$ c. $(2x+1)^4$ d. $(x^2+2)^3$

Soient x, a, b des réels.

Faisons d'abord un triangle de Pascal

$n=0$ 1
$n=1$ 1 1
$n=2$ 1 2 1
$n=3$ 1 3 3 1
$n=4$ 1 4 6 4 1
$n=5$ 1 5 10 10 5 1
$n=6$ 1 6 15 20 15 6 1

a) $(a+b)^6 = 1 \times a^6 + 6 \cdot a^5 \times b + 15 \times a^4 \times b^2 + 20 \cdot a^3 \times b^3 + 15 \cdot a^2 \times b^4 + 6 \cdot a \cdot b^5 + 1 \times b^6$

b) $(2-x)^5 = 1 \times 2^5 + 5 \times 2^4 \times (-x) + 10 \times 2^3 \times (-x)^2 + 10 \times 2^2 \times (-x)^3 + 5 \times 2 \times (-x)^4 + 1 \times (-x)^5$
$= 32 - 80x + 80x^2 - 40x^3 + 10x^4 - x^5$

c) $(2x+1)^4 = 1 \times (2x)^4 + 4 \times (2x)^3 \times 1 + 6 \times (2x)^2 \times 1^2 + 4 \times (2x) \times 1^3 + 1 \times 1^4$
$= 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$

d) $(x^2+2)^3 = 1 \times (x^2)^3 + 3 \times (x^2)^2 \times 2 + 3 \cdot x^2 \times 2^2 + 1 \times 2^3$
$= x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8$

Exercice 12 – Calcul de somme.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. À l'aide du binôme de Newton, calculer la somme suivante

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la question précédente, calculer les sommes suivantes

$$1.\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k, \qquad 2.\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \qquad 3.\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

1. En utilisant le binôme de Newton, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k$$
$$= (x+1)^n$$

2. On a

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^n = 3^n$

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (-1+1)^n = 0$

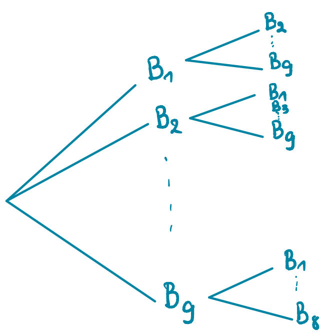
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k = (1+1)^n = 2^n$

Vers les probabilités finies...

Exercice 13 – Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules. Déterminer le nombre d'issues total et le nombre d'issues correspondant à l'obtention de deux boules de numéro paire dans chacun des deux cas.

1. Tirage sans remise avec ordre.
2. Tirage avec remise avec ordre.
3. Tirage sans remise sans ordre.

1. Sans remise avec ordre



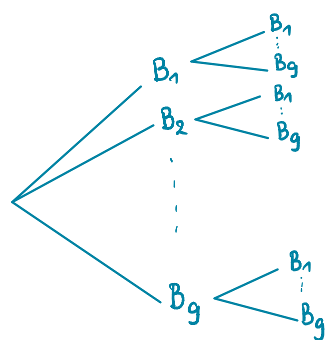
- Nombre total d'issues :

$$\underbrace{9}_{\text{choix de la 1ière boule}} \times \underbrace{8}_{\text{choix de la 2ième boule}}$$

Nombre d'issues avec deux boules paires :

$$\underbrace{4}_{\text{choix de la 1ière boule avec un n° pair } (B_2 \text{ ou } B_4 \text{ ou } B_6 \text{ ou } B_8)} \times \underbrace{3}_{\text{choix de la 2ième boule avec un n° pair } (B_2 \text{ ou } B_4 \text{ ou } B_6 \text{ ou } B_8 \text{ sauf la boule déjà tirée})}$$

2. Avec remise avec ordre



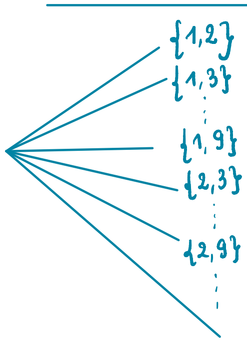
- Nombre total d'issues :

$$\underbrace{9}_{\text{choix 1ière boule}} \times \underbrace{9}_{\text{choix 2ième boule}} = 81$$

- Nombre d'issues avec deux boules paires :

$$\underbrace{4}_{\text{choix de la 1ière boule avec un n° pair } (B_2 \text{ ou } B_4 \text{ ou } B_6 \text{ ou } B_8)} \times \underbrace{4}_{\text{choix de la 2ième boule avec un n° pair } (B_2 \text{ ou } B_4 \text{ ou } B_6 \text{ ou } B_8)}$$

3. Sans remise sans ordre



- Nombre total d'issues :

$$\binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2}$$

choix de 2 nbres parmi 9

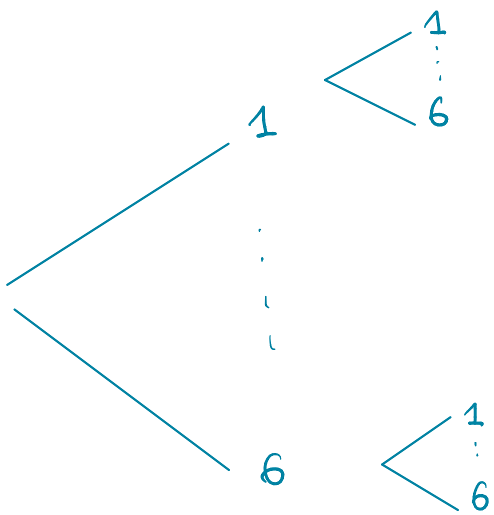
- Nombre d'issues avec 2 nbres pairs :

$$\binom{4}{2} = 3 + 2 + 1 + 0$$

choix de 2 nbres pairs parmi les 4 possibles

Exercice 14 – On lance deux fois un dé à six faces (tirage avec remise). On s'intéresse aux deux valeurs prises par le dé (dans l'ordre des deux lancers).

1. Donner le nombre d'issues total.
2. Donner le nombre d'issues total conduisant à l'obtention d'une somme des deux lancers égale à 6.
3. Donner le nombre d'issues total conduisant à l'obtention d'une somme des deux lancers égale à 7.
4. Donner le nombre d'issues total conduisant à l'obtention d'une somme des deux lancers égale à 6 et en ayant obtenu à 4 au premier lancer.



1. Nbre d'issues totales :

6×6

2. Nbre d'issues dont la somme vaut 6 :

5×1

choix du 1er chiffre libre sauf 6 qui ne permet pas avec un 2ième lancer d'avoir une somme = à 6

choix du 2ième chiffre pour avoir $\Sigma = 6$ (fixe)

1-5
2-4
3-3
4-2
5-1

3. Nbre d'issues dont la somme vaut 7 :

6×1

4. Nbre d'issues dont la somme vaut 6 et 4 au premier lancer :

1×1

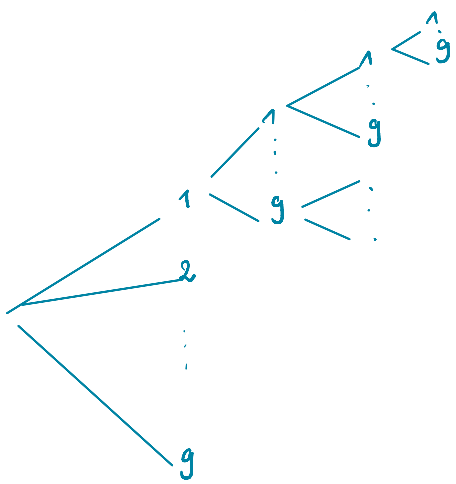
choix du 1er chiffre imposé (4)

choix du 2ème chiffre imposé pour que la somme face 6.

4-2

Exercice 15 – À l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de 9 touches : 1,2,...,9. Le code d'ouverture de la porte est composé d'un nombre de quatre chiffres. *Un code à quatre chiffres peut être vu comme le choix successifs de quatre nombres compris entre 1 et 9. Avec ce point de vue, on peut représenter la situation grâce à un arbre de probabilité.*

1. Combien y a-t-il de codes différents ?
2. Le code a été changé et choisi au hasard.
   (a) Combien de codes comportent au moins une fois le chiffre 7 ?
   (b) Combien de codes ne comportent que des chiffres pairs ?
   (c) Combien de codes comportent que quatre chiffres différents ?



1. Nbre de codes ≠ :

$$9 \times 9 \times 9 \times 9$$

2.a) Nbre de code avec au moins un chiffre 7 :

$$\underbrace{9 \times 9 \times 9 \times 9}_{\text{nbre de codes total}} - \underbrace{8 \times 8 \times 8 \times 8}_{\text{nbres de codes sans aucun chiffre 7}}$$

b) Nbre de code avec que des chiffres pairs :

$$\underbrace{4}_{\text{choix du 1er chiffre qui doit être pair (2 ou 4 ou 6 ou 8)}} \times \underbrace{4}_{\text{choix du 2nd chiffre qui doit être pair (2 ou 4 ou 6 ou 8)}} \times 4 \times 4$$

...

c) Nbre code avec que des chiffres ≠ :

$$9 \times 8 \times 7 \times 6$$

choix du 1er chiffre libre

choix du 2nd chiffre qui doit être ≠ du 1er

choix du 3ème chiffre qui doit être ≠ des 2 premiers.