14 Théorie des graphes

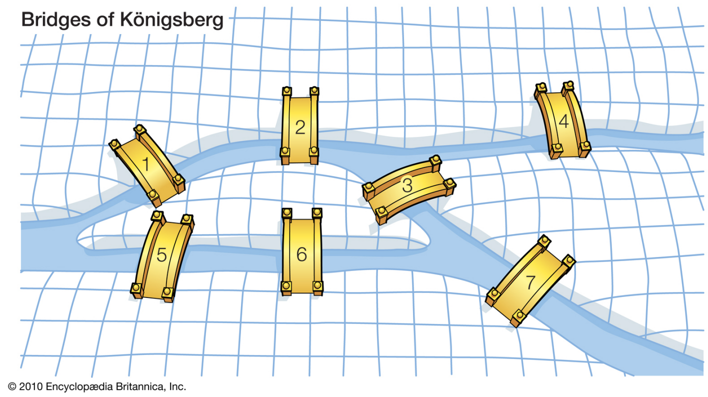
Introduction

La théorie des graphes est une branche des mathématiques récente. L'article considéré comme fondateur de cette théorie fut présenté par le mathématicien Leonhard Euler en 1735 et traitait du problème des sept ponts de Königsberg. C'est donc au XX^{e} que cette théorie va connaître son véritable essor avec l'utilisation croissante dans la vie quotidienne des réseaux :

- réseaux de transport routier, transport d'eau, d'électricité ;
- réseaux de transport de données (réseau de téléphonie fixe, GSM, wifi ...) ;
- réseaux d'informations (bases de données, web, réseaux sociaux ...).

Cette théorie est également devenue fondamentale en informatique et nous étudierons quelques algorithmes liée au graphes.

Exemple 0.1 — Exemple historique, les ponts de Königsberg.



Euler a posé le problème suivant : *Peut-on, à partir d'un point de départ au choix, passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ ?*

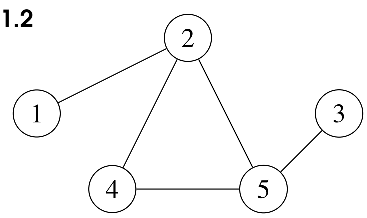
1 Définitions

1.1 Graphes non orientés

Définition 1.1 Un **graphe non orienté** G est un couple $(S, \mathcal{A})$ où :

- S est l'ensemble de **sommets**.
- $\mathcal{A}$ est un ensemble d'**arêtes**, c'est-à-dire un ensemble de paires (=couples non ordonnés) de sommets reliés.

Exemple 1.2

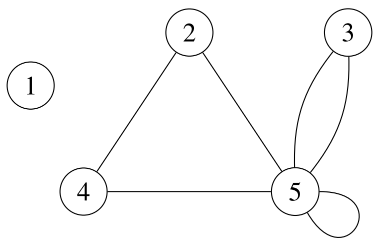


Sommets	$S = \{1,2,3,4,5\}$
Arêtes	$\mathcal{A} = \{\{1,2\},\{2,4\},\{4,5\},\{2,5\},\{3,5\}\}$
Arêtes	$\mathcal{A} = \{1-2, 2-4, 4-5, 2-5, 3-5\}$

Définition 1.3 Soit $G = (S, \mathcal{A})$ un graphe non orienté.

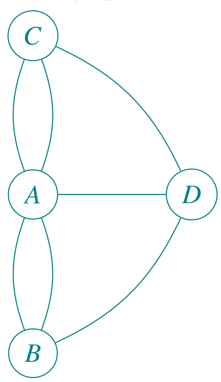
- Les deux sommets définissant une arête sont ses **extrémités**.
- Une **boucle** est une arête dont les deux extrémités sont identiques.
- Deux sommets sont **adjacents** lorsqu'ils sont reliés par une arête.
- L'**ordre** d'un graphe est égal au nombre de ses sommets.
- Un graphe est **simple** lorsqu'il ne contient ni boucle ni arête multiple entre deux même sommets.
- Un graphe est **multigraphe** lorsqu'au moins deux sommets sont reliés par plusieurs arêtes.
- Un sommet est **isolé** lorsqu'aucune arête ne le relie à un autre sommet.

Exemple 1.4



Sommets	$S = \{1,2,3,4,5\}$
Extrémités	2 et 4 sont les **extrémités** de l'arête $\{2,4\}$
Boucle	On a une **boucle** au niveau du sommet 5
Adjacents	Les deux sommets 4 et 5 sont **adjacents**
Adjacents	Les deux sommets 2 et 3 ne sont pas **adjacents**
Ordre	L'**ordre** du graphe est 5
Simple	Le graphe n'est pas **simple**
Isolé	Le sommet 1 est **isolé**
Isolé	Le sommet 2 n'est pas **isolé**

Exemple 1.5 — Exemple historique, les ponts de Königsberg. On peut représenter le problème des ponts de Königsberg à l'aide du graphe suivant.

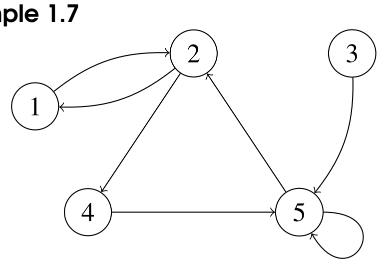


Sommets	$S = \{A,B,C,D\}$
Ordre	4
Boucle	Le graphe n'a pas de **boucle**
Simple	Le graphe n'est pas **simple**

1.2 Graphes orientés

Définition 1.6 Un **graphe orienté** G est un couple $(S,\mathcal{A})$ où :
- S est l'ensemble de **sommets**.
- $\mathcal{A}$ est un ensemble d'**arcs**, c'est-à-dire un ensemble de couples de sommets reliés.

Exemple 1.7



Sommets	$S = \{1,2,3,4,5\}$
Arcs	$\mathcal{A} = \{(1,2),(2,1),(2,4),(4,5),(5,2),(5,5),(3,5)\}$

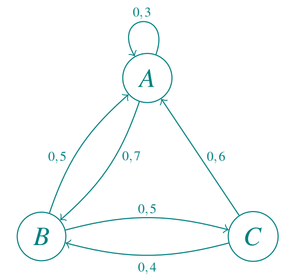
Exemple 1.8 — Réseaux sociaux. Un réseau social peut-être représenté par un graphe orienté dont les sommets sont les utilisateurs et les arcs représentent par exemple la relation « est ami avec ». Par exemple,
- Facebook peut être représenté par un graphe à 2,1 milliards de sommets.
- Linkedin peut être représenté par un graphe à 740 millions de sommets.

Exemple 1.9 — Graphe du web. Le graphe du web peut être modélisé par un graphe orienté dont les sommets sont des pages web et un arc représente un lien hypertextuel qui pointe d'une page vers une autre. Google répertorie par exemple plus de 130 000 milliards de pages.

1.3 Graphes pondérés

Définition 1.10 Un graphe **pondéré** est un graphe (orienté ou non) sur lequel chaque arc ou arête est pondéré par un réel strictement positif.

Exemple 1.11 — Introduction aux chaînes de Markov.



On considère l'évolution d'un objet pouvant se trouver en trois endroits différents A, B et C selon les règles suivantes.

- Si l'objet est en A, il y reste avec une probabilité $0,3$ ou il va en B avec une probabilité $0,7$.
- Si l'objet est en B, il va en A ou en C de manière équiprobable.
- Si l'objet est en C, il va en A avec une probabilité $0,6$ ou en B avec une probabilité $0,4$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note A_n (resp. B_n et C_n) l'évènement "L'objet se situe en A (resp. en B et en C) à l'instant n". Alors, comme $(A_n, B_n, C_n$ forme un SCE, en utilisant la **formule des probabilités totales**, on a

$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P(A_{n+1}|A_n) + P(B_n)P(A_{n+1}|B_n) + P(C_n)P(A_{n+1}|C_n)$$

c'est-à-dire

$$P(A_{n+1}) = 0,3P(A_n) + 0,5P(B_n) + 0,6P(C_n)$$

Finalement, on obtient le système linéaire suivant.

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} P(A_{n+1}) & = & 0,3P(A_n) & + & 0,5P(B_n) & + & 0,6P(C_n) \\ P(B_{n+1}) & = & 0,7P(A_n) & + & 0,4P(C_n) & & \\ P(C_{n+1}) & = & & & 0,5P(B_n) & & \end{array}\right.$$

De manière équivalente, on obtient l'équation matricielle suivante.

$$\begin{pmatrix} P(A_{n+1}) \\ P(B_{n+1}) \\ P(C_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,6 \\ 0,7 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'évolution de cette chaîne de Markov dépend des propriétés (spectrales) de la matrice qui apparaît.

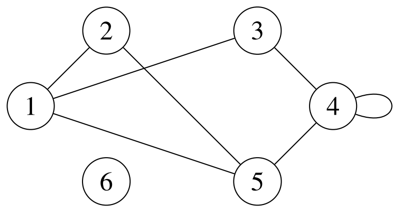
Exemple 1.12 — Carte routière. Une carte routière peut se modéliser par un graphe pondéré orienté dont les sommets sont les villes, les arcs sont les routes entre les différentes villes et la pondération correspondant à la distance à parcourir entre les différentes villes.

2 Degré d'un sommet

Définition 2.1 — Cas non orienté. Soit G un graphe **non orienté**. Soit $s \in S$ un sommet de G. Le **degré** de s, noté $\deg(s)$, est le nombre d'arêtes ayant pour extrémité s.

Si le sommet est isolé, son degré est nul. Une **boucle compte double dans le degré** car elle a deux extrémités rattachées au sommet.

Exemple 2.2



Sommet	1	2	3	4	5	6
Degré	3	2	2	4	3	0

On remarque que

$$\sum_{s \in S} \deg(s) = 3+2+2+4+3+0 = 14 = 2 \times 7.$$

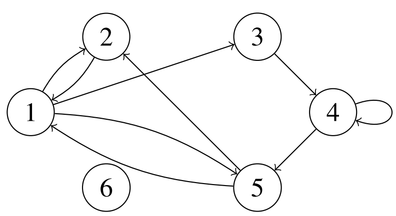
Définition 2.3 — Cas orienté. Soit G un graphe **orienté**. Soit $s \in S$ un sommet de G.

- Le **degré entrant** de s, noté $\deg^-(s)$, est le nombre d'arcs entrant vers s.
- Le **degré sortant** de s, noté $\deg^+(s)$, est le nombre d'arcs sortant de s.

Finalement, le **degré** de s est donné par

$$\deg(s) = \deg^+(s) + \deg^-(s).$$

Exemple 2.4



Sommet	1	2	3	4	5	6
$\deg^+$	3	1	1	2	2	0
$\deg^-$	2	2	1	2	2	0
$\deg$	5	3	2	4	4	0

On remarque que

$$\sum_{s \in S} \deg(s) = 5+3+2+4+4+0 = 18 = 2 \times 9.$$

Proposition 2.5 — Lemme des poignées de mains, Formule d'Euler. Soit $G = (S, \mathcal{A})$ un graphe (orienté ou non) contenant n arêtes/arcs. Alors

$$\sum_{s \in S} \deg(s) = 2n.$$

En particulier, la somme des degrés est toujours un nombre pair.

Proposition 2.6 — Lemme des poignées de mains, Formule d'Euler. Dans le cas d'un graphe **orienté**, on a

$$\sum_{s \in S} \deg^+(s) = \sum_{s \in S} \deg^-(s) = n$$

Exemple 2.7 Dans une petite ville, il y a 15 appareils téléphoniques. Est-il possible de les relier par des fils téléphoniques pour que chaque appareil soit relié avec exactement 5 autres ?

Supposons que les 15 appareils téléphoniques soient tels que chaque appareil soit relié avec exactement 5 autres. Cette situation peut être représentée par un graphe

□ orienté ■ non orienté

contenant

15 sommets chacun de degré 5

En particulier, on aurait

$$\sum_{s\in S} \deg(s) = \sum_{s\in S} 5 = 15 \times 5 = 75.$$

Ceci n'est pas possible, car d'après la formule d'Euler, la somme des degrés est toujours un nombre pair.

Exemple 2.8 Soit G un graphe **complet**, c'est-à-dire un graphe non orienté dont chaque sommet est adjacent à tous les autres sauf lui. Montrons que si G est un graphe d'ordre n, alors il possède

$$\frac{n(n-1)}{2} \text{ arêtes.}$$

Soit G un graphe complet d'ordre n. Notons p son nombre d'arêtes.

- Le graphe comporte n sommets.
- Chaque sommet est adjacent à tous les autres sauf lui, c'est-à-dire chaque sommet est de degré $n-1$.

Donc, en utilisant la formule d'Euler, on a

$$2p = \sum_{i=1}^{n} (n-1) = n(n-1).$$

Donc le nombre d'arête est donné par

$$p = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Exemple 2.9 Lors d'un repas, des étudiants de CPGE, accompagnés de leur professeure de mathématiques se saluent par une poignée de main. Tous les individus se sont salués et on a compté 190 poignées de main. Quel est l'effectif du groupe d'étudiants ?

Notons n le nombre d'étudiants. Cette situation peut être modélisée par un graphe non orienté, comportant $n+1$ sommets, représentant chaque étudiant plus la professeure, et 190 arêtes, représentant les poignées de main échangées. De plus, le graphe est complet : tous les individus se sont salués, c'est-à-dire que chaque somme est adjacent à tous les autres sauf lui. En utilisant l'exemple précédent, on a

$$190 = \frac{(n+1)n}{2} \qquad \text{c-à-d} \qquad n^2 + n - 380 = 0$$

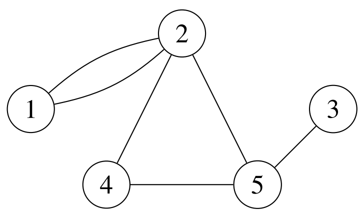
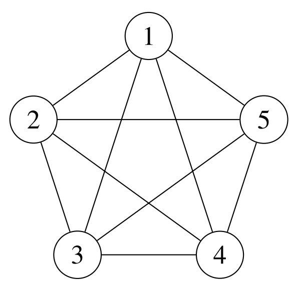
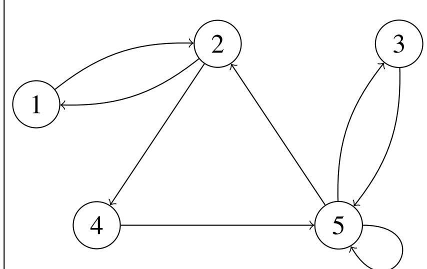
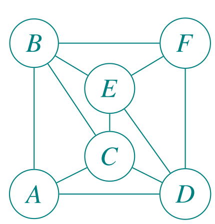
Le polynôme $x \mapsto x^2 + x - 380$ admet deux racines données par 19 et -20. On ne garde uniquement que la racine positif. Ceci signifie qu'il y avait 19 élèves présents.

3 Matrice d'adjacence

Définition 3.1 Soit G un graphe ayant n sommets $s_1, s_2, \ldots, s_n$. On appelle **matrice d'adjacence** de G la matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

- Si G est non **orienté** : $m_{i,j}$ est le nombre d'arêtes reliant s_i et s_j.
- Si G est **orienté** : $m_{i,j}$ est le nombre d'arcs allant de s_i vers s_j.

Exemple 3.2 Remplir le tableau suivant.

Graphe	Matrice d'adjacence	Remarques
	$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	• Graphe **non orienté** ↪ Matrice symétrique • Graphe sans **boucle** ↪ Des zéros sur la diagonale
	$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	• Graphe **simple** ↪ Matrice ne contient que 0 ou 1 • Graphe **non orienté** ↪ Matrice symétrique • Graphe **complet** ↪ $M = J - I_5$ où J ne contient que des 1
	$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	• Graphe **orienté** ↪ Matrice non symétrique
	$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	

Proposition 3.3 La matrice d'adjacence d'un graphe **non orienté** est symétrique.

4 De l'art de relier des sommets...

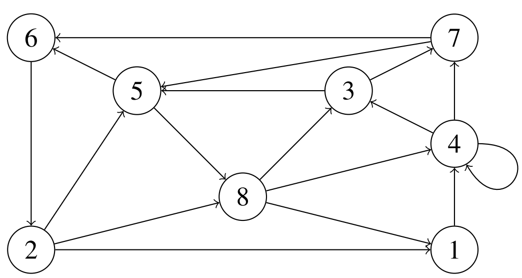
4.1 Chaînes et cycles

Définition 4.1 Soit G un graphe non orienté (respectivement orienté).
- Une **chaîne** (resp. un **chemin**) de G est une liste ordonnée C de sommets telle qu'il existe toujours une arête (resp. un arc) reliant deux sommets consécutifs.
- La **longueur** de C est égale au nombre d'arêtes/arcs.
- C est dit **simple** si lorsque toutes les arêtes/arcs figure au plus une fois.
- C est dit **élémentaire** si tous les sommets sont deux à deux distincts, sauf peut-être le départ et l'arrivée.
- C est appelé un **cycle** (resp. un **circuit**) s'il est simple et se termine à son point de départ.

En résumé (de manière informelle),

Chaîne/Chemin	Un trajet dans le graphe
Longueur	Le nombre de routes prises
Simple	On ne prend jamais deux fois la même route
Elémentaire	On ne passe pas deux fois au même endroit
Cycle/circuit	On fait un tour complet (sans jamais prendre la même route)

Exemple 4.2

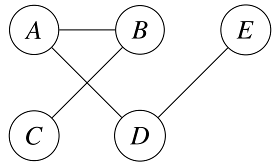


Simple	$8-4-4$
Pas Simple	$2-5-6-5-7$
Elémentaire	$2-5-3-4$
Pas Elémentaire	$8-4-4$
Cycle/circuit	$1-4-3-5-8-1$ (longueur 5)

Voici l'information fournie par la matrice d'adjacence sur les chaînes (ou chemins) d'un graphe.

Proposition 4.3 — Nombre de chaîne/chemin. Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe G. Soient $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ les sommets de G. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coefficient d'indice (i,j) de la matrice M^k est égal au nombre de chemins/chaînes de longueur k reliant s_i à s_j.

Exemple 4.4 On considère le graphe suivant



On note M sa matrice d'adjacence et on admet que

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

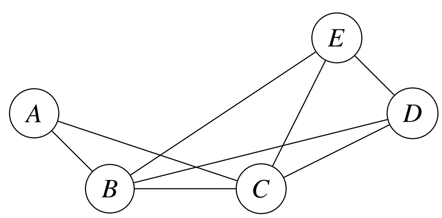
On en déduit que

- Nombre de chaîne de longueur 2 reliant A et E : 1 donnée par A-D-E
- Nombre de chaîne de longueur 2 reliant A et A : 2 donnée par A-B-A et A-D-A

4.2 Graphes connexes

Définition 4.5 Un graphe est dit **connexe** si, pour tout couple de sommets (s_d, s_a) distincts, il existe toujours un chemin/une chaîne reliant s_d à s_a (dans ce sens si le graphe est orienté).

Exemple 4.6 Le graphe suivant est-il connexe ?



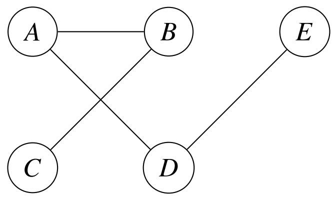
On peut démontrer la connexité en listant, pour tout couple de sommets distincts, une chaîne les reliant. Comme le graphe étant non orienté, le tableau sera symétrique, donc on ne précise qu'une seule moitié.

	A	B	C	D	E
A	–				
B	B-A	–			
C	C-A	C-B	–		
D	D-B-A	D-B	D-C	–	
E	E-B-A	E-B	E-C	E-D	–

Il y a bien une chaîne reliant tout couple de sommets dont le graphe est connexe.

Proposition 4.7 Soit M est la matrice d'adjacence d'un graphe G à n sommets. Le graphe G est connexe si et seulement si la matrice $I_n + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$ a tous ses coefficients strictement positifs.

Exemple 4.8 Montrer que le graphe suivant est connexe.



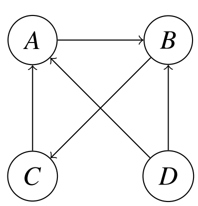
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Première méthode (longue). Pour tout couple de sommets distincts, on exhibe une chaîne les reliant (cf tableau de l'exemple précédent).
- Deuxième méthode (calculatoire). Après calcul, on a

$$I_5 + M + M^2 + M^3 + M^4 = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 8 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

  Comme la matrice $I_5 + M + M^2 + M^3 + M^4$ a tous ses coefficients strictement positifs, le graphe est connexe.
- Troisème méthode (efficace). La chaîne C-B-A-D-E passe par tous les sommets du graphe. Donc à fortiori, on peut toujours relier par une chaîne deux points quelconques du graphe. Donc le graphe est connexe.

Exemple 4.9



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Après calcul, on a

$$I_4 + M + M^2 + M^3 + M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme la matrice $I_4 + M + M^2 + M^3 + M^3$ admet des coefficients nuls, le graphe n'est pas connexe. En effet, on ne peut pas établir de chaîne entre B et D.

4.3 Distance entre deux sommets

Définition 4.10 Soit G un graphe connexe.

- Soient x et y deux sommets de ce graphe. On appelle **distance** de x à y, noté $\mathrm{d}(x,y)$ la longueur du plus court chemin/chaîne allant de x à y.
- Le **diamètre** d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets du graphe.

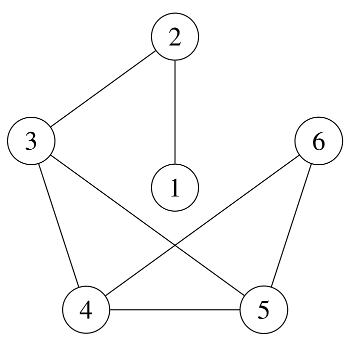
Proposition 4.11 Soit G un graphe connexe d'ordre n. Notons M sa matrice d'adjacence. Pour tout couple (s_i, s_j) de sommets, on a

$$\mathrm{d}(s_i,s_j) = \min\{k \in [\![0,n-1]\!] \mid (A^k)_{i,j} > 0\}.$$

Et le diamètre du graphe est donné par

$$\mathrm{diam}(G) = \max\{d(s_i,s_j) \mid (i,j) \in [\![0,n-1]\!]^2\}$$

Exemple 4.12 Déterminer le diamètre du graphe suivant en utilisant la matrice d'adjacence.



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut calculer que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 7 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 16 & 10 & 10 & 12 \\ 1 & 7 & 10 & 16 & 15 & 9 \\ 1 & 7 & 10 & 15 & 16 & 9 \\ 2 & 2 & 12 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad A^5 = \cdots$$

On peut remplir ce tableau récapitulant la distance entre les différents points. Sachant que le graphe n'est pas orienté, tout est symétrique, donc on ne remplit le tableau qu'à moitié.

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
s_1	-	-	-	-	-	-
s_2	1	-	-	-	-	-
s_3	2	1	-	-	-	-
s_4	3	2	1	-	-	-
s_5	3	2	1	1	-	
s_6	4	3	2	1	1	-

On peut en déduire le diamètre de ce graphe

$$\text{diam}(G) = 4.$$

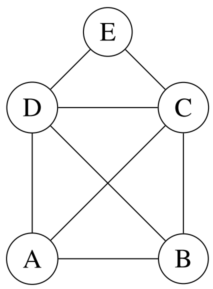
4.4 Graphe eulérien

On se restreint ici aux graphes non orientés.

Définition 4.13 Une **chaîne eulérienne** est une chaîne passant par toutes les arêtes du graphe une et une seule fois. Un graphe est dit **eulérien** s'il existe un cycle passant par toutes les arêtes une et une seule fois.

? De manière formelle, cela revient à se demander si on peut tracer le graphe sans jamais lever le crayon et sans passer deux fois par la même route.

Exemple 4.14

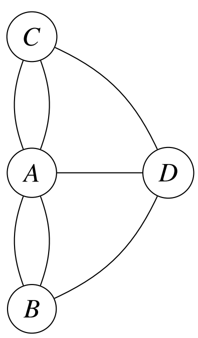


Chaîne eulérienne	Oui : A-D-B-C-E-D-C-A-B
Graphe eurélien	Non

Proposition 4.15 Soit G un graphe non orienté et connexe.
1. G admet une chaîne eulérienne si tous ses sommets sont de degrés pairs sauf éventuellement deux.
2. G est eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

! Les éventuels deux sommets de degré impairs sont le départ et l'arrivée (quand ils sont différents).

Exemple 4.16



Sommets	A	B	C	D
Degré	5	3	3	3

Conclusion : Pour appliquer le théorème, il faudrait déjà vérifier que le graphe est connexe. De plus, il y a quatre sommets impairs (A, B, C, D). Par conséquent, le graphe de Königsberg n'admet pas de chaîne eulérienne.