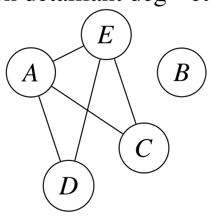
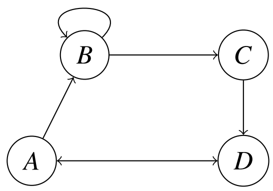
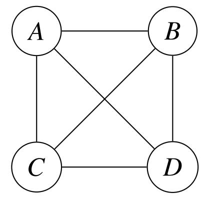
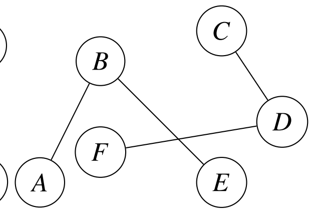
TD 14 – Théorie des graphes

Exercice 1 – Pour chaque graphe, dire s'il est orienté ou non, s'il est complet ou non, donner son ordre et le degré (en détaillant $\deg^+$ et $\deg^-$ dans le cas d'un graphe orienté) de ses sommets.



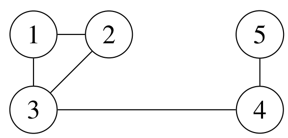






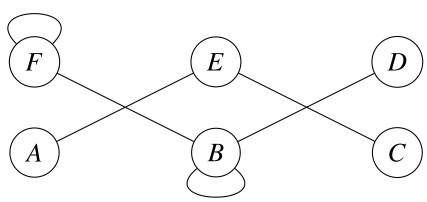
Exercice 2 – En 2019, les 20 professeurs d'une prépa se sont rencontrés pour une réunion. Ils se sont tous serré la main. Combien de poignées de mains ont été serrées ?

Exercice 3 – On considère le graphe non orienté suivant :

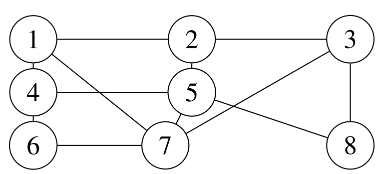


1. Écrire la matrice d'adjacence A de ce graphe.
2. Combien de chaînes de longueur 4 y a-t-il entre les sommets 1 et 4 ? Lister ensuite ces chemins.
3. Démontrer par le calcul que ce graphe est connexe.

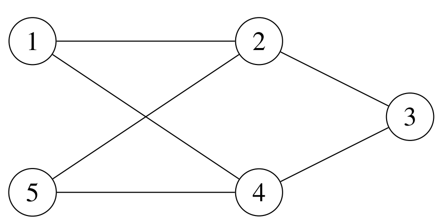
Exercice 4 – Le graphe suivant est-il connexe ?



Exercice 5 – Est-il possible de dessiner ce graphe sans lever le crayon et en passant une, et une seule fois, par chaque trait ?



Exercice 6 – On considère le graphe suivant :

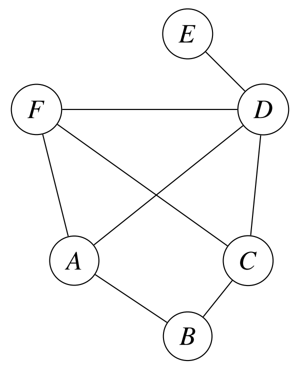


1. Écrire la matrice d'adjacence M de ce graphe.
2. Montrer que $M^3 = 6M$.
3. Montrer que pour tout entier naturel k, $M^{2k+1} = 6^k M$.
4. En déduire le nombre de chaînes de longueur 5 allant du sommet 2 au sommet 3.

Exercice 7 – Une maison, construite sur un seul niveau, possède 18 ouvertures (portes et fenêtres). Chaque pièce a deux ouvertures sur l'extérieur et deux ouvertures sur l'intérieur. Combien de pièces cette maison possède-t-elle ?

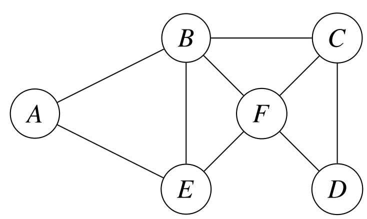
Exercice 8 – Démontrer que dans un groupe de n personnes, il y en a toujours deux qui connaissent exactement le même nombre de membres du groupe.

Exercice 9 – On considère le graphe suivant :



1. Déterminer le degré de chaque sommet.
2. Former la matrice d'adjacence M du graphe en numérotant les sommets de A à F.
3. Combien y'a t-il de chaînes de longueur 4 joignant E à F ?
4. Ce graphe est-il complet ?
5. Ce graphe est-il connexe ?

Exercice 10 – On considère le graphe suivant :



1. Le graphe est-il connexe ?
2. Montrer qu'il possède au moins une chaîne eulérienne. Donner les deux seules extrémités possibles de cette chaîne.

L'algorithme d'Euler consiste à déterminer dans n'importe quel graphe connexe une chaîne eulérienne. Il s'articule en quatre temps :

- *Créer une chaîne simple entre deux sommets de degrés impairs.*
- *Tant que toutes les arêtes du graphe n'ont pas été utilisées, choisir un sommet quelconque de la chaîne précédente et trouver un cycle associé (partant de ce sommet et arrivant à ce sommet) ne contenant aucune des arêtes déjà utilisées.*
- *Insérer ce cycle en remplacement du sommet choisi à l'étape précédente.*
- *Recommencer ainsi de suite jusqu'à avoir utilisé toutes les arêtes.*

3. Mettre en place l'algorithme d'Euler en partant des chaînes suivantes :
   (a) $E-F-D-C$;
   (b) $E-B-C$.