

Chapitre 3 : Calculs de dérivées

Le but de ce chapitre est de se re-familiariser avec le **calcul de dérivées**, sans rentrer dans les détails de la théorie. La rédaction des exemples peut donc manquer de rigueur qui sera rajoutée par la suite.

1 Dérivées usuelles

Ensemble de définition	Fonction	Ensemble de dérivabilité	Dérivée
\mathbb{R}	$x \mapsto k, \quad k \text{ constante}$	\mathbb{R}	$x \mapsto 0$
\mathbb{R}	$x \mapsto x^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}	$x \mapsto nx^{n-1}$
\mathbb{R}^*	$x \mapsto \frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}^*	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$
\mathbb{R}^*	$x \mapsto \frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$]0, +\infty[$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
\mathbb{R}	$x \mapsto e^x$	\mathbb{R}	$x \mapsto e^x$
$]0, +\infty[$	$x \mapsto \ln(x)$	$]0; +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{x}$

Exemple 1.1 Remplir le tableau suivant.

Ensemble de définition	Fonction	Ensemble de dérivabilité	Dérivée
\mathbb{R}	$x \mapsto x^2$	\mathbb{R}	$x \mapsto 2x$
\mathbb{R}	$x \mapsto -6$	\mathbb{R}	$x \mapsto 0$
\mathbb{R}^*	$x \mapsto x^{-5}$	\mathbb{R}^*	$x \mapsto -\frac{5}{x^6}$
\mathbb{R}^*	$x \mapsto \frac{1}{x^4}$	\mathbb{R}^*	$x \mapsto -\frac{4}{x^5}$
$]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

2 Opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonction définies et dérivables sur un intervalle I .

Somme	$(u + v)' = u' + v'$
Multiplication par un réel	pour $k \in \mathbb{R}$ (constante), $(k \times u)' = k \times u'$
Produit	$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
Inverse (si pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$)	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
Quotient (si pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$)	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

Exemple 2.1 Remplir le tableau suivant.

Ensemble de définition	Fonction	Ensemble de der.	Dérivée
\mathbb{R}	$x \mapsto 4x^3 - 5x^2 + x - 1$	\mathbb{R}	$x \mapsto 12x^2 - 10x + 1$
$]0, +\infty[$	$x \mapsto 5x^3 - \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto 15x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$
\mathbb{R}	$x \mapsto (x^2 + 1)(x^3 - 2x)$	\mathbb{R}	$x \mapsto 5x^4 - 3x^2 - 2$
\mathbb{R}	$x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$	\mathbb{R}	$x \mapsto -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$
$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \frac{2x-1}{x+1}$	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \frac{3}{(x+1)^2}$
$[0, +\infty[$	$x \mapsto \sqrt{x} \times (5x - 3)$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{15x-3}{2\sqrt{x}}$
\mathbb{R}	$x \mapsto \frac{x^2 + 3x}{2}$	\mathbb{R}	$x \mapsto x + \frac{3}{2}$
\mathbb{R}	$x \mapsto \left(2x^5 - \frac{3}{2}x^2\right)\left(\frac{5}{6}x^2 - 5\right)$	\mathbb{R}	$x \mapsto \frac{35}{3}x^6 - 50x^4 - 5x^3 + 15x$
$\mathbb{R} \setminus \{\frac{8}{3}\}$	$x \mapsto \frac{5x^2 - 2x + 6}{8 - 3x}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{8}{3}\}$	$x \mapsto \frac{-15x^2 + 80x + 2}{(8 - 3x)^2}$

3 Dérivée d'une composée

Soient u et v deux fonction définies et dérivables sur un intervalle I .

Composée	$(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$
Composée avec \ln	$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$
Composée avec \exp	$(\exp(u))' = u' \times \exp(u)$
Composée avec une puissance	$(u^n)' = nu' \times u^{n-1}$
Composée avec la racine carrée	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Exemple 3.1 Remplir le tableau suivant.

Ensemble de définition	Fonction	Ensemble de der.	Dérivée
\mathbb{R}	$x \mapsto \sqrt{x^4 + 1}$	\mathbb{R}	$x \mapsto \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$
\mathbb{R}	$x \mapsto (6x^2 + 3x)^3$	\mathbb{R}	$x \mapsto 9(4x + 1)(6x^2 + 3x)^2$
$\left]\frac{3}{5}, +\infty\right[$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{5x-3}}$	$\left]\frac{3}{5}, +\infty\right[$	$x \mapsto -\frac{5}{2(5x-3)^{\frac{3}{2}}}$
\mathbb{R}^*	$x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right)$	\mathbb{R}^*	$x \mapsto -\frac{1}{x^2} \times \exp\left(\frac{1}{x}\right)$
$\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$	$x \mapsto \ln(2x + 1)$	$\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$	$x \mapsto \frac{2}{2x+1}$
$\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$	$x \mapsto (-6x + 9)^{-3}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$	$x \mapsto 18(-6x + 9)^{-4}$

Exemple 3.2 Soient u une fonction dérivable sur \mathbb{R} et a et b deux nombres réels. On définit la fonction f par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = u(ax + b).$$

Calculer la dérivée de la fonction f .



Gestes Invisibles/Automatismes. Il s'agit ici de décomposer f comme la composée de deux fonctions de la manière suivante,

$$x \xrightarrow{v} ax + b \xrightarrow{u} f(x)$$

Soit v la fonction définie par pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v(x) = ax + b$. Alors, on remarque que $f = u \circ v$. Comme u et v sont dérivables sur \mathbb{R} , par composition la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est donnée par,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) = au'(ax + b).$$

4 Tangente

Proposition 4.1 Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. Alors la **tangente** de la courbe représentative de f au point d'abscisse a est la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$



La dérivée en un point a correspond donc au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a , c'est-à-dire que la dérivée en un point correspond localement à la «pente» de la courbe autour de ce point là.

Exemple 4.2 Relier chaque définition de tangente à son équation réduite.

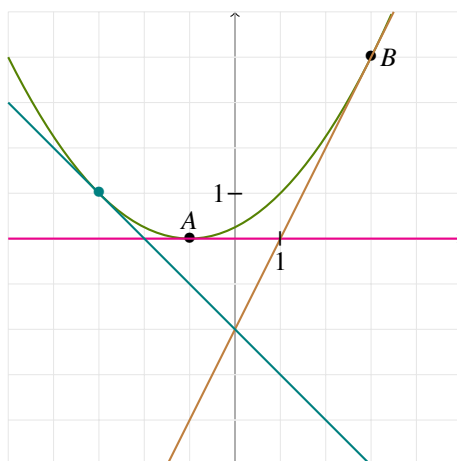
$f(1) = 5, f'(1) = 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> $y = 5$
$g'(2) = -1, g(2) = 3$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> $y = 2x - 6$
$h'(-5) = 1/2, h(-5) = -3/2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> $y = -x + 5$
$k(3) = 0, k'(3) = 2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> $y = \frac{1}{2}x + 1$

Exemple 4.3 On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-5, 5]$ par

$$\text{pour tout } x \in [-5, 5], \quad f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2.$$

Les tangentes à la courbe en A et B ont été tracées.

- Déterminer graphiquement $f'(-1)$ et $f'(3)$.
- Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse -3 . La représenter graphiquement.



- Graphiquement, $f'(1)$ correspond au coefficient directeur de la tangente au point A. Comme la tangente au point A est horizontale, son coefficient directeur est de 0 donc $f'(1) = 0$. De même, on trouve que $f'(3) = 2$ («quand on avance de un, on monte de deux»).
- L'équation de la tangente au point d'abscisse -3 est donnée par

$$y = f'(-3)(x + 3) + f(-3).$$

Or, en utilisant l'expression explicite de la fonction f , on obtient $f(-3) = 1$. De plus, la fonction f est dérivable sur $[-5, 5]$ et sa dérivée est donnée par

$$\text{pour tout } x \in [-5, 5], \quad f'(x) = \frac{1}{4} \times 2(x+1) = \frac{1}{2}(x+1)$$

En particulier, on obtient que, $f'(-3) = -1$. Donc, l'équation de la tangente au point d'abscisse -3 est donnée par

$$y = -(x+3) + 1 = -x - 2$$