

~~Exercice 1~~

Exercice 1

- ① Graphe non orienté d'ordre 5

Sommets	A	B	C	D	E
Degré	3	0	2	2	3

- ② Graphe orienté d'ordre 4

Sommets	A	B	C	D
deg ⁺	2	2	1	1
deg ⁻	1	2	1	2
deg	3	4	2	3

- ③ Graphe non orienté d'ordre 4

S	A	B	C	D
deg	3	3	3	3

Graphe complet K_4

- ④ Graphe non orienté d'ordre 6

S	A	B	C	D	E	F
deg	1	2	1	2	1	1

Exercice 2

Graphe • 20 sommets (sommet adjacent à tout le monde)
• tous de degré 19 (~~sauf lui~~)
C'est K_{20} , graphe complet d'ordre 20.

Nbre de poignées de main
= nbre d'arête du graphe $\rightarrow p$

Formule d'Euler:

$$\sum_{s \in S} \deg(s) = 2p$$

ie.

$$2p = \sum_{s \in S} 19 = 20 \times 19$$

donc

$$p = 10 \times 19 = 190$$

Exercice 3

1.
$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Nbre de chemins de longueur 4 entre 1 et 4 = $(A^4)_{1,4}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a donc 5 chemins de longueur 4 entre 1 et 4:

$$\begin{cases} 1-3-4-5-4 \\ 1-2-1-3-4 \\ 1-3-1-3-4 \\ 1-3-4-3-4 \\ 1-3-2-3-4 \end{cases}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 6 & 5 & 1 \\ 6 & 7 & 6 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & 12 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (A^2)^2$$

(pour minimiser les calculs)

3. Comme le graphe est d'ordre 5, il est connexe ssi

$I_5 + A + A^2 + A^3 + A^4$
a que des termes strictement positifs.

On

$$I_5 + A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 12 & 7 & 2 \\ 11 & 12 & 12 & 7 & 2 \\ 12 & 12 & 18 & 4 & 5 \\ 7 & 7 & 7 & 9 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

→ connexité!

Autre méthode (cf exo 9)
La chaîne 1-2-3-4-5 passe par tous les sommets du graphe.

Exercice 4

Matrice d'adjacence:

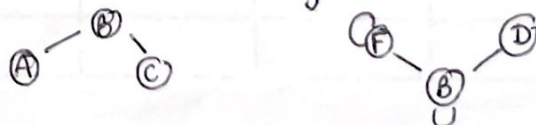
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et on calcule que (*)

$$I_6 + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 56 & 0 & 25 & 0 & 44 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 42 & 0 & 19 \\ 7 & 0 & 7 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 44 & 0 & 19 & 0 & 37 \end{pmatrix}$$

Donc le graphe n'est pas connexe.

Cela se voit: il y a des sous-graphes indé:



$$(*) \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & 6 & 0 & 11 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 5 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 31 & 0 & 14 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & 6 & 0 & 11 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 11 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

On se demande si ce graphe admet une chaîne eulérienne.
i.e. si tous les sommets sont de degré pair.

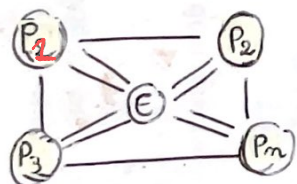
S	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	3	3	3	3	4	2	4	2

Il y a quatre sommets de degré impair donc il n'admet pas de chaîne eulérienne.

Exercice 7

Graphe : sommets : pièces + ent = $n+1$
arête : avoir une ouverture total = 18

Notons n le nombre de pièces.



- $\forall i \in \{1, \dots, n\}$
 $\text{degré}(P_i) = 4$
car 4 ouvertures
- $\text{degré}(E) = 2n$

Formule d'Euler :

$$\begin{aligned}
 2 \times 18 &= \sum_{s \in S} \text{degré}(s) \\
 &= \sum_{i=1}^n \text{degré}(P_i) + \text{degré}(E) \\
 &= 4n + 2n
 \end{aligned}$$

donc $6n = 2 \times 3 \times 3 \times 2$ donc $n = 6$.

Exercice 8

Graphe :

- sommets : personnes total = n $\{P_1, \dots, P_n\}$
- arête : se connaître

But : Montrer qu'il existe $i \neq j$,
 $\text{degré}(P_i) = \text{degré}(P_j)$

(deux personnes au moins connaissent le même nombre de personnes)

Supposons par l'absurde que
 $\forall i \neq j, \text{degré}(P_i) \neq \text{degré}(P_j)$

Comme

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, 0 \leq \text{degré}(P_i) \leq n-1$$

on en déduit (quitte à réorganiser l'ordre)

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \text{degré}(P_i) = i.$$

Donc il existe

- une personne qui ne connaît personne ($\text{degré} = 0$)

- une personne qui connaît tout le monde ($\text{degré} = n-1$)

c'est absurde.

Exercice 6

1.
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Du calcul.

3. Récurrence en utilisant que $M^3 = 6M$.

4. En particulier, la formule donne

$$M^5 = 6^2 M$$

Donc le nombre de chemins de longueur 5 allant du sommet 2 au sommet 3 est

$$6^2 \times 1 = 36.$$

Exercice 10

1.
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Autre méthode (cf exo 9)

La chaîne A-B-C-D-F-E
passe par tous les sommets
du graphe.

On calcule que

$$I_6 + M + \dots + M^5 = \begin{pmatrix} 40 & 72 & 52 & 38 & 59 & 64 \\ 72 & 111 & 89 & 64 & 98 & 122 \\ 52 & 89 & 78 & 59 & 75 & 98 \\ 38 & 64 & 59 & 40 & 52 & 72 \\ 59 & 98 & 75 & 52 & 78 & 99 \\ 64 & 122 & 98 & 72 & 99 & 111 \end{pmatrix}$$

a tous ses coeff strictement positifs donc
le graphe est connexe.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 3 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 7 & 9 \\ 3 & 8 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 3 & 5 & 2 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 7 & 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 12 & 6 & 11 & 17 \\ 13 & 30 & 18 & 17 & 24 & 24 \\ 12 & 17 & 20 & 11 & 18 & 21 \\ 6 & 17 & 11 & 15 & 13 \\ 11 & 21 & 18 & 12 & 20 & 17 \\ 17 & 24 & 21 & 13 & 18 & 30 \end{pmatrix}$$

$$M^5 = \begin{pmatrix} 24 & 51 & 36 & 23 & 41 & 42 \\ 51 & 76 & 72 & 44 & 67 & 86 \\ 36 & 72 & 50 & 44 & 51 & 67 \\ 23 & 44 & 41 & 24 & 36 & 51 \\ 41 & 67 & 51 & 36 & 50 & 71 \\ 42 & 86 & 67 & 51 & 71 & 86 \end{pmatrix}$$

2.

S	A	B	C	D	E	F
deg	2	4	3	2	3	4

• Tous les sommets sauf 2 sont de degré pair donc le graphe possède une chaîne eulérienne.

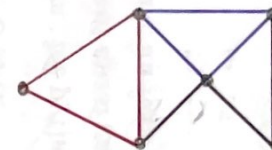
• les extrémités possibles de cette chaîne sont les sommets de degré impair donc C ou E.

3. (a)

E - F - D - C

E - A - B - E - F - D - C

E - A - B - F - C - B - E - F - D - C



(b)

E - B - C

E - A - B - F - C - E - B - C



Exercice 9

sommet	A	B	C	D	E	F
degré	3	2	3	4	1	3

2. Matrice d'adjacence :

$$M = \begin{pmatrix} & A & B & C & D & E & F \\ A & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ B & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ D & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ E & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ F & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les annotations en gris sont une aide mais ne doivent pas apparaître sur une copie

3. Le nbre de chaînes de longueur 4 joignant E à F est donné par le coefficient en ligne 5 et colonne 6 de la matrice M^4 .

Après calculs, on obtient

$$M^4 = \begin{pmatrix} 21 & 4 & 21 & 12 & 8 & 12 \\ 4 & 12 & 4 & 16 & 2 & 14 \\ 21 & 4 & 21 & 12 & 8 & 12 \\ 12 & 16 & 12 & 26 & 4 & 20 \\ 8 & 2 & 8 & 4 & 4 & 6 \\ 12 & 14 & 12 & 20 & 6 & 20 \end{pmatrix}$$

NB: pour minimiser les calculs, on peut simplement calculer M^2 et en déduire M^4 grâce à :
 $M^4 = (M^2)^2$

On trouve donc 6 chaînes de longueur 4 entre E et F.

4. Un graphe est complet si chaque sommet est adjacent à tous les autres sommets sauf lui. Les sommets E et F ne sont pas reliés donc le graphe n'est pas complet.

Calculs annexes :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 21 & 4 & 21 & 12 & 8 & 12 \\ 4 & 12 & 4 & 16 & 2 & 14 \\ 21 & 4 & 21 & 12 & 8 & 12 \\ 12 & 16 & 12 & 26 & 4 & 20 \\ 8 & 2 & 8 & 4 & 4 & 6 \\ 12 & 14 & 12 & 20 & 6 & 20 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & 8 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & 6 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 6 & 2 & 8 & 1 & 7 \\ 8 & 2 & 8 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 7 & 7 & 7 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad M^5 = \begin{pmatrix} 28 & 42 & 28 & 62 & 12 & 54 \\ 42 & 8 & 42 & 24 & 16 & 24 \\ 28 & 42 & 28 & 62 & 12 & 54 \\ 62 & 24 & 62 & 48 & 26 & 50 \\ 12 & 16 & 12 & 26 & 4 & 20 \\ 54 & 24 & 54 & 50 & 20 & 44 \end{pmatrix}$$

5. Première méthode (Bcp de calculs)

Après calculs, on obtient que

$$I_6 + M + M^2 + M^3 + M^4 + M^5 = \begin{pmatrix} 28 & 42 & 28 & 62 & 12 & 54 \\ 42 & 8 & 42 & 24 & 16 & 24 \\ 28 & 42 & 28 & 62 & 12 & 54 \\ 62 & 24 & 62 & 48 & 26 & 50 \\ 12 & 16 & 12 & 26 & 4 & 20 \\ 54 & 24 & 54 & 50 & 20 & 44 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a que des coeff > 0 donc le graphe est connexe.

Deuxième méthode (moins de calculs)

$I_6 + M + M^2 + M^3 + M^4 + M^5$ a que des coeff > 0 par somme. Donc graphe connexe.

ont des coeff > 0 par construction de la matrice d'adjacence
 a que des coeff > 0 d'après le calcul de la q^3

Troisième méthode (sans calcul)

La chaîne E-D-A-F-C-B passe par tous les sommets du graphe. Donc on peut toujours relier par une chaîne deux points quelconques du graphe. Donc le graphe est connexe.