DS 3 (Concours Blanc 1)

- *Les candidat·e·s sont invité·e·s à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible leurs résultats.*
- *Aucun document n'est autorisé.* ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***
- *Pour augmenter la* ***lisibilité*** *des calculs, dans la mesure du possible, les égalités successives seront présentées en colonne (et non pas en ligne) avec les différents symboles = bien alignés.*

Exercice 1 – Adapté d'ECRICOME 2013, Maths E. On désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 3 à coefficients réels et par 0_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix}$$

ainsi que le polynôme R défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad R(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3.$$

1. Montrer que R' (la dérivée de R) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 avec $r_1 < r_2$ que l'on explicitera.
2. Dresser le tableau de variations de R en y ajoutant les valeurs de R en r_1 et r_2 et les limites de R en $+\infty$ et en $-\infty$.

On admet que le polynôme R possède trois racines réelles a, b, c avec

$$0 < a < r_1 < b < r_2 < c.$$

On ne cherchera pas à calculer ces trois racines.

3. Soit λ un réel. On pose

$$X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

   Montrer que

$$AX_\lambda - \lambda X_\lambda = 0_{3,1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad R(\lambda) = 0$$

4. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AM + MA = 0_3$. *On admet qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$ avec*

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

   où a, b, c sont les racines du polynôme R.

   (a) Montrer que $DM' + M'D = 0_3$ où l'on a posé $M' = P^{-1}MP$.

   (b) On note

$$M' = \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix}$$

   Déterminer les neuf coefficients de la matrice $DM' + M'D$.

   (c) En déduire que $M' = 0_3$ puis que $M = 0_3$.

Exercice 2 – Adapté d'ECRICOME 2015, Maths E. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par,

$$u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-u_n}$$

1. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$$

   (a) Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   (c) Tracer l'allure de la courbe de f.
   (d) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^x \geqslant x + 1$$

   (e) Grâce à la question 1b, résoudre l'équation

$$\mathrm{e}^x = x + 1$$

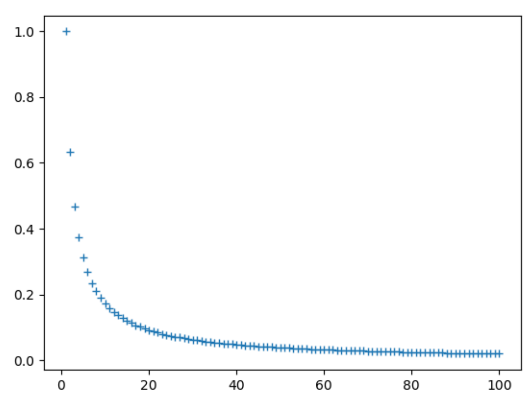
2. Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n > 0$$

3. Recopier et compléter le programme `Python` suivant afin qu'il calcule et affiche les cent premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (et u_1 à u_{100}).

```
import numpy as np
u = 1
print(u)
for k in range(......, ......):
    u = ..........
    print(u)
```

4. On a représenté ci-dessous les cent premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.



   Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la monotonie et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. *On pourra s'aider de la question 1d.*
6. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite finie que l'on notera ℓ.
7. Déterminer la valeur de la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3 – Adapté d'Ecricome 2020, Maths T.

Partie I

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 7u_{n+1} + 8u_n.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Cependant, dans ce problème, on cherche à déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **sans passer par l'équation caractéristique**.

1. Recopier et compléter les lignes 5 à 9 incomplètes du script Python ci-dessous pour qu'il crée et renvoie la liste $L = [u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n]$ pour n un entier naturel entré par l'utilisateur.

```
1  n = .... #à completer par l'utilisateur
2  u = 0
3  v = 1
4  L = [u, v]
5  for k in .........
6          .........
7          .........
8          .........
9          .........
10 print(L)
```

2. On définit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad s_n = u_{n+1} + u_n$$

   (a) Que vaut s_0 ?
   (b) Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 8.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de s_n en fonction de n.

3. On pose,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = (-1)^n u_n \quad \text{et} \quad t_n = v_n - v_{n+1}$$

   (a) Exprimer, pour tout entier naturel n, t_n en fonction de s_n.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t_n = (-8)^n$.

4. Soit n un entier naturel non nul fixé dans toute cette question.
   (a) Calculer la somme suivante.

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i$$

   (b) Justifier que :

$$\sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1}) = -v_n$$

   (c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   (d) En déduire que

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1} + 8^n}{9}$$

   (e) La formule précédente est-elle valable aussi pour $n = 0$?

Partie II

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note 0_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5. Montrer que $M^2 - 7M - 8I = 0_3$.
6. En déduire que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de M et de I.
7. (a) On pose : $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Vérifier que : $M^0 = a_0M + b_0I$.
   (b) Déterminer deux réels a_1 et b_1 tels que : $M^1 = a_1M + b_1I$.
   (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$M^n = u_nM + 8u_{n-1}I$$
   où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie dans la Partie I.
   (d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de M^n sous la forme d'une matrice.

Exercice 4 – Adapté d'EML 1993, Maths E. Soit

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \end{array}$$

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$. *On admet que f est également dérivable sur $\mathbb{R}$.*
2. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Que vaut $\sqrt{x^2}$ si $x < 0$?
   (c) En déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$.
3. Démontrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x^2+1} \times (x^2+1)}$$
4. Former le tableau de variations de f.
5. (a) Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) - x = \frac{(x+1)(1-\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}$$
   (b) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Démontrer que,
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sqrt{x^2+1} \geqslant 1$$
   (d) En déduire le tableau de signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$.
   (e) En déduire la position relative de la courbe de f et de la droite Δ d'équation $y = x$.