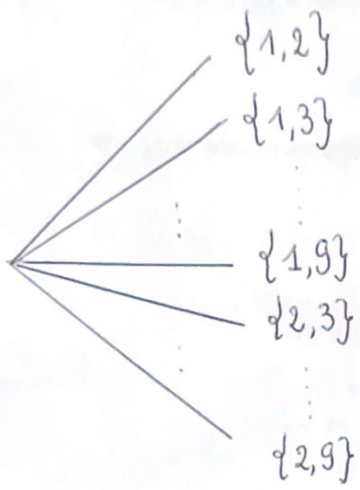
Exercice 1 (Proba uniforme)

- Tirage simultané (pas d'ordre)



$\star$ $\text{card}\,\Omega = \underset{1}{8} + \underset{2}{7} + \underset{3}{6} + \underset{4}{5} + \underset{5}{4} + \underset{6}{3} + \underset{7}{2} + \underset{8}{1} + \underset{9}{0}$

$= \dfrac{8 \times 9}{2} = 36$

$= \binom{9}{2}$

$\star$ card ("les deux num sont pairs")

$= \underset{2}{3} + \underset{4}{2} + \underset{6}{1} + \underset{8}{0} = \binom{4}{2}$

$= 6$

$\star$ card ("les deux num sont impairs")

$= \underset{1}{4} + \underset{3}{3} + \underset{5}{2} + \underset{7}{1} + \underset{9}{0} = \binom{5}{2}$

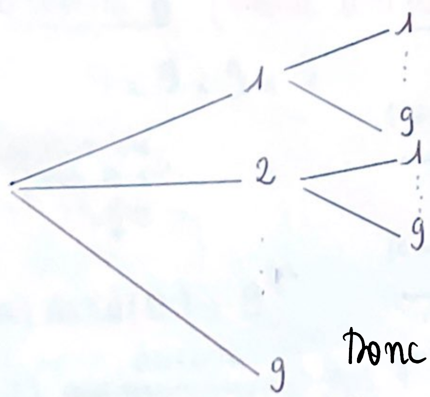
$= 10$

Donc P("obtenir deux num pairs") $= 6/36 = 1/6$

Donc P("même parité") $\underset{\text{union disjointe}}{=} \dfrac{6}{36} + \dfrac{10}{36} = \dfrac{16}{36} = \dfrac{4}{9}$

Exercice 2

- Tirage avec remise (ordre)



$\star$ $\text{card}\,\Omega = 9 \times 9 = 81$

$\star$ card ("les deux pairs")

$= 4 \times 4$

$\star$ card ("les deux impairs")

$= 5 \times 5$

Donc P("obtenir 2 num pairs") $= \dfrac{4 \times 4}{9 \times 9} = \dfrac{16}{81}$

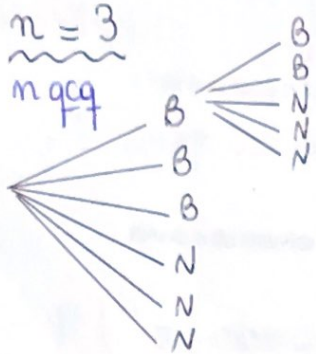
Donc P("même parité") $= \dfrac{16}{81} + \dfrac{25}{81} = \dfrac{41}{81}$

car union disjointe

Exercice 3 (Proba uniforme)

∘ $n = 3$

n qcq



$\star$ $\text{card}\,\Omega = 6 \times 5 \times 4$ $\quad 2n(2n-1) \times \dots \times (n+1)$

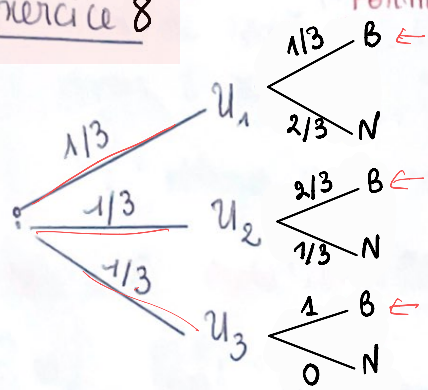
$\star$ card("3 boules noires") $= 3 \times 2 \times 1$

$n \times (n-1) \times \dots \times 1$

$$P(\text{"3 boules noires"}) = \frac{3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4} = \frac{1}{20}$$

$$= \frac{n!}{2n \times \dots \times (n+1)} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Exercice 8 (Formule des proba totales) Formule de Bayes



4 . Formule des proba totales :

$$P(B) = P(U_1)P_{U_1}(B) + P(U_2)P_{U_2}(B) + P(U_3)P_{U_3}(B)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{3}$$

$$= \frac{6}{9}$$

$$= \frac{2}{3}$$

1. $P(U_1) = 1/3$ (proba uniforme)
2. $P_{U_1}(B) = 1/3$ (proba uniforme)
3. $P(U_1 \cup U_2) = P(U_1) + P(U_2)$ car les évènements sont incompatibles
$= 1/3 + 1/3$
$= 2/3$

5. Retour en arrière → Formule de Bayes

$$P_B(U_1) = \frac{P(U_1)P_{U_1}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\ (\text{question } 1)} = \frac{1}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$$

Exercice 4 (Proba uniforme)

1. $\underbrace{9}_{\text{possibilité pour le 1er chiffre}} \times 9 \times 9 \times 9$ ...

2. a) $\text{card}(\Omega) = 9^4$

card("~~au moins une fois~~ aucun 7")

$= 8 \times 8 \times 8 \times 8$

⚠ "au moins" regarder l'évènement contraire

. $P(\bar{A}) = \dfrac{8^4}{9^4}$

. $P(A) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{8^4}{9^4}$

b) $P(\text{"tous pairs"}) = \dfrac{4^4}{9^4}$

c) P("tous les chiffres diff")

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{9^4}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6}{9^3}$$

Exercice 5

(Proba uniforme) $32 = 8 \times 4$

$\text{card}(\Omega) = \binom{32}{8}$

le jeu où on a ôté les coeurs

1. $P(\text{"aucun coeur"}) = \dfrac{\binom{\boxed{32-8}}{8}}{\binom{32}{8}} = \dfrac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}}$

$P(\text{"au moins un coeur"}) = 1 - \dfrac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}}$

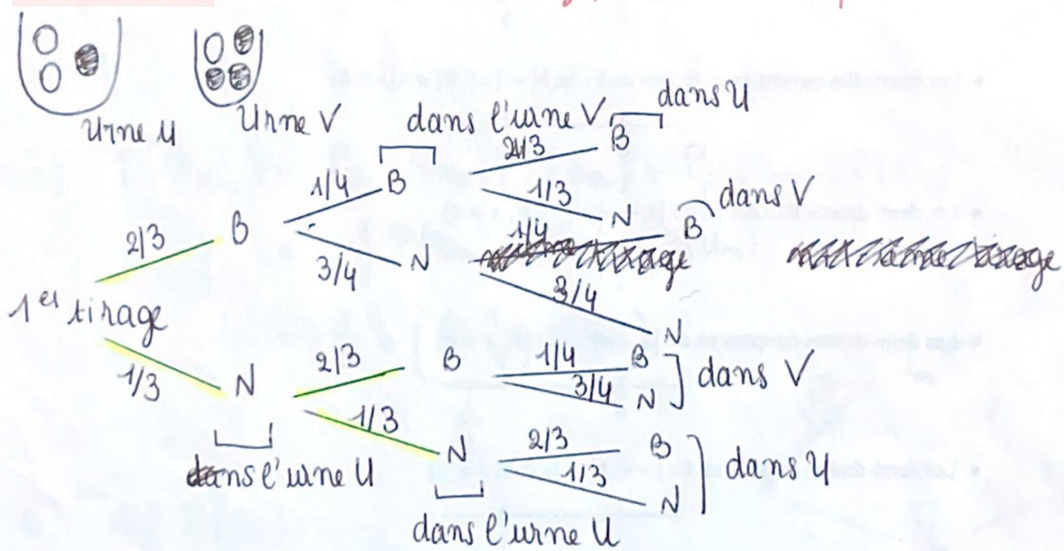
2. Nbre de carré possible $= 8$ (77 - 88 - ....)

Avoir 2 carrés $= \binom{8}{2}$

$P(\text{"obtenir deux carrés"}) = \dfrac{\binom{8}{2}}{\binom{32}{8}}$

Exercice 14

(Proba conditionnelle, Formule des proba totales)



1 a) $P(U_2) = \cancel{P(U_1 \cap N)} = P_{U_1}(N)\,P(U_1) = \frac{1}{3} \times 1$

$= P(U_1 \cap N)$

b) $P(U_3)$ = en lisant l'arbre $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$

$= P_{U_2}(U_3)\,P(U_2) + P_{V_2}(U_3)\,P(V_2)$ (proba totale)

$= \cancel{P(N)} \times \frac{1}{3} + \cancel{P(B)} \times \frac{2}{3}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{18}$

2. $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$ $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$

$$= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \quad \text{(proba composées)}$$

$$= \frac{2}{3} \times P_{V_2}(B_2) \times P_{U_3}(B_3)$$

$$= \frac{\cancel{2}}{3} \times \frac{1}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{2}}{3} = \frac{1}{9}$$

$p_n = P(U_n)$

$p_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} p_n$

$U_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} U_n$

3. On cherche $P_{B_2}(U_2)$.
On cherche à remonter le temps → Bayes + proba totale

$$P_{B_2}(U_2) = \frac{P(U_2)\, P_{U_2}(B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{P_{U_2}(B_2)P(U_2) + P_{V_2}(B_2)P(V_2)}$$

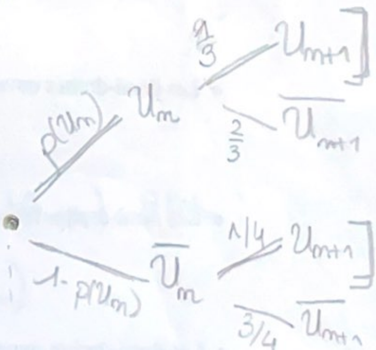
$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{4}{7}$$

4 a) $$P(U_{n+1}) = P_{U_n}(U_{n+1})\, P(U_n) + P_{V_n}(U_{n+1})\, P(V_n)$$

$$= \frac{1}{3} P(U_n) + \frac{1}{4}(1 - P(U_n))$$

$$= \frac{1}{4} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{12}} P(U_n)$$



b)
```
def P(n):
    p = 1          # p1
    for k in range(2, n+1):
        p = 1/4 + 1/12 p
    return(p)
```

5. $$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} U_n \end{cases}$$

suite arithmético-géométrique :

$\ell = \frac{3}{11}$

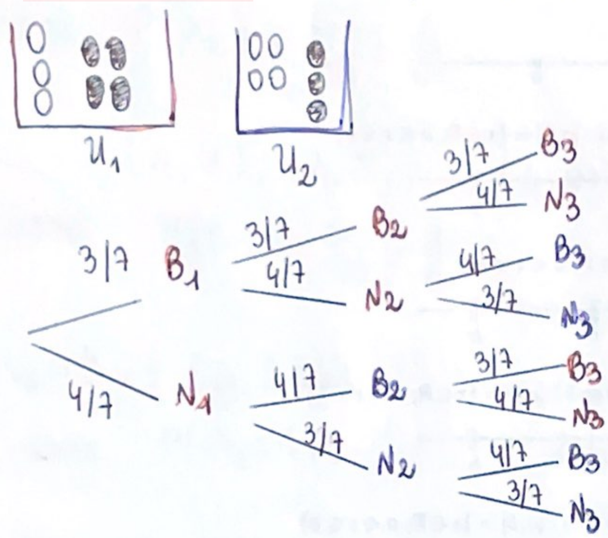
$$U_n = \frac{8}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + \frac{3}{11}$$

$$P(B_n) = P_{U_n}(B_n)\,P(U_n) + P_{V_n}(B_n)\,P(V_n)$$

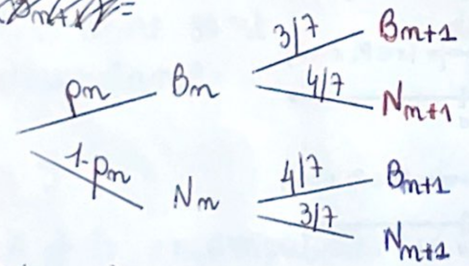
$$= \frac{2}{3} \times u_n + \frac{1}{4}(1-u_n)$$

$$= \frac{40}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^n + \frac{4}{11}$$

Exercice 13 (même principe que l'exo 8)



1. $\cancel{P(B_{n+1})} =$



$p_1 = \frac{3}{7}$

$$P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1}) \times P(B_n) + P_{N_n}(B_{n+1}) \times P(N_n)$$

$$p_{n+1} = \frac{3}{7} \times p_n + \frac{4}{7} \times (1-p_n)$$

$$= \frac{4}{7} - \frac{1}{7} p_n$$

2. $\left(l = \frac{1}{2}\right)$ $\quad p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{14}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}$

Exercice 6

$\Omega = [\![1 \dots 6]\!]^2$ en particulier card $\Omega = 36$

- $A_1 = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

  donc $P(A_1) = \frac{5}{36}$

- $A_2 = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$

  donc $P(A_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

- $B = \{(4,1), (4,2), \dots, (4,6)\}$

  donc $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

- $A_1 \cap B = \{(4,2)\}$

  donc $P(A_1 \cap B) = \frac{1}{36}$

- $A_2 \cap B = \{(4,3)\}$

  donc $P(A_2 \cap B) = \frac{1}{36}$

__Ccl__ : $P(A_1 \cap B) \neq P(A_1) \times P(B)$

donc A_1 et B ne sont pas indépendants

$P(A_2 \cap B) = P(A_2) \times P(B)$

donc A_2 et B sont indépendants.

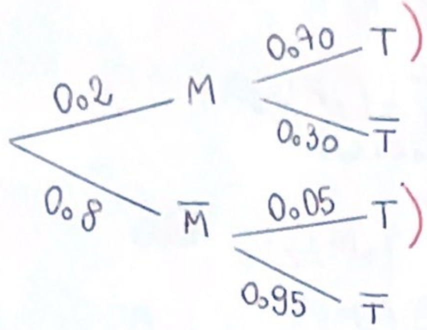
Exercice 10

Informations : $P(M) = \frac{20}{100} = 0{,}2$ M : "malade"

T : "test positif"

$P_M(T) = 0{,}70$

$P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0{,}95$



1) On cherche $P_T(M)$ "retour dans le temps" → Bayes

$$P_T(M) = \frac{P(M)\,P_M(T)}{P(T)}$$

Or, formule des proba totales ($(M, \overline{M})$ syst. complet d'évènements)

$$P(T) = P(M)\,P_M(T) + P(\overline{M})\,P_{\overline{M}}(T)$$
$$= 0{,}18$$

Finalement,

$$P_T(M) = \frac{0{,}2 \times 0{,}70}{0{,}18} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9} \simeq 0{,}78$$ pas hyper efficace

2) $P(T) = 0{,}44$

puis $P_T(M) \simeq 0{,}956$ efficace.

Exercice 11

M_k : "la machine k est en panne"

1. On cherche $P(\overbrace{M_1 \cup M_2 \cup M_3}^{S \text{ "le système est en panne"}})$

On va calculer (ou formule du crible + indé.)

$$P(\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3}) = P(\overline{M_1}) P(\overline{M_2}) P(\overline{M_3}) \quad \text{par indé}$$
$$= (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$$

puis $P(M_1 \cup M_2 \cup M_3) = p_1 + p_2 + p_3 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3 + p_1p_2p_3 = P(S)$

2. On veut $P_S(M_1)$ "retour ds le tps" → Bayes.

$$P_S(M_1) = \frac{P(M_1) P_{M_1}(S)}{P(S)}$$

car si M_1 en panne, le syst. est en panne

$$= \frac{p_1 \times 1}{p_1 + p_2 + \dots}$$

Exercice 7

(faire un arbre)

- $\overline{A}$: " soit aucun pile soit aucun face"

$\overline{A} = (F_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (P_1 \cap P_2 \cap P_3)$

$P(\overline{A}) = (1-p)^3 + p^3$ (union disjointe + indé.)

donc $P(A) = 1 - (1-p)^3 - p^3$

- $B = \underbrace{(F_1 \cap F_2 \cap F_3)}_{\text{aucun pile}} \cup \underbrace{(P_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3)}_{\text{exactement un pile}}$

$P(B) = (1-p)^3 + 3p(1-p)^2$

- $A \cap B$ = " il est apparu exactement un pile (et au-un face)"

$P(A \cap B) = 3p(1-p)^2$

- si $p = 1/4$

$P(A) = \frac{3^2}{2^4}$; $P(B) = \frac{3^3}{2^5}$; $P(A \cap B) = \frac{3^3}{2^6}$

Non

- si $p = \frac{1}{2}$

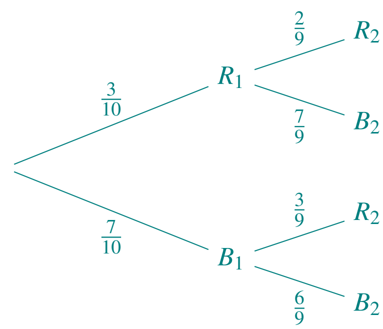
$P(A) = \frac{3}{4}$; $P(B) = \frac{1}{2}$; $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$

Oui

Exercice 9 On tire successivement et sans remise deux boules dans une urne contenant 7 boules blanches et 3 boules rouges.

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge?
2. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?
3. Quelle est la probabilité que la seconde boule soit rouge ?
4. Quelle est la probabilité qu'au moins l'une des deux boules soit rouge ?
5. La seconde boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité que la première boule le soit aussi ?

Correction. Pour tout $k \in \{1,2\}$, notons R_k l'évènement «Obtenir un boule rouge au k-ième lancer» et $B_k = \overline{R_k}$, c'est-à-dire l'évènement «Obtenir un boule noire au k-ième lancer». On peut représenter la situation par l'arbre de probabilité suivant.



1. *On cherche à calculer $P(R_1)$.* D'après l'énoncé, comme au premier tirage, la probabilité de tirer chaque boule est **uniforme**, on a
$$P(R_1) = \frac{3}{10}.$$
2. *On cherche à calculer $P(R_1 \cap R_2)$.* D'après la **formule des probabilités composées**, on a,
$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15}.$$
3. *On cherche à calculer $P(R_2)$.* Comme (R_1, B_1) est un **système complet d'évènements**, d'après la **formule des probabilités totales**, on a
$$\begin{aligned} P(R_2) &= P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(R_2) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} \\ &= \frac{1}{15} + \frac{7}{30} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$
4. *On cherche à calculer $P(R_1 \cup R_2)$.* En utilisant la **formule du crible**, on a
$$\begin{aligned} P(R_1 \cup R_2) &= P(R_1) + P(R_2) - P(R_1 \cap R_2) \\ &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{15} \\ &= \frac{8}{15}, \end{aligned}$$
en utilisant les valeurs trouvées aux questions 1, 2 et 3.
5. *On cherche à calculer $P_{R_2}(R_1)$.* D'après la **formule de Bayes**, on a
$$P_{R_2}(R_1) = \frac{P(R_1) \times P_{R_1}(R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{3}{10} \times \frac{2}{9}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{9}.$$

■

Exercice 12

Notons $\forall k \in \{1,..,5\}$, P_k " Obtenir Pile au k-ième lancer".

- $\mathbb{P}(X_1) = \mathbb{P}(P_1)$ On obtient le 1er Pile au 1er lancer ie on obtient Pile au 1er lancer

$= p$

- $\forall k \in \{2,3,4\}$,

$\mathbb{P}(X_k) = \mathbb{P}(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap ... \cap \overline{P_{k-1}} \cap P_k)$

On obtient Pile pour la 1ère fois au k^e lancer donc pendant les k-1 premiers lancers, on obtient que des Face et au k^e lancer, Pile.

$= \mathbb{P}(\overline{P_1}) \times \mathbb{P}(\overline{P_2}) \times ... \times \mathbb{P}(\overline{P_{k-1}}) \times \mathbb{P}(P_k)$ car les lancers sont indépendants.

$= (1-p) \times (1-p) \times ... \times (1-p) \times p$

$= (1-p)^{k-1} \times p$

- $\mathbb{P}(X_5) = \mathbb{P}((\overline{P_1} \cap ... \cap \overline{P_4} \cap P_5) \cup (\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap ... \cap \overline{P_5}))$

soit on obtient le 1er pile au 5^e lancer
soit on obtient aucun Pile

$= \mathbb{P}(\overline{P_1} \cap ... \cap \overline{P_4} \cap P_5) + \mathbb{P}(\overline{P_1} \cap ... \cap \overline{P_5})$

car les évènements $\overline{P_1} \cap .. \cap \overline{P_4} \cap P_5$ et $\overline{P_1} \cap .. \cap \overline{P_5}$ sont incompatibles

$= \mathbb{P}(\overline{P_1}) \times .. \times \mathbb{P}(\overline{P_4}) \times \mathbb{P}(P_5) + \mathbb{P}(\overline{P_1}) \times ... \times \mathbb{P}(\overline{P_5})$

car les lancers sont indépendants

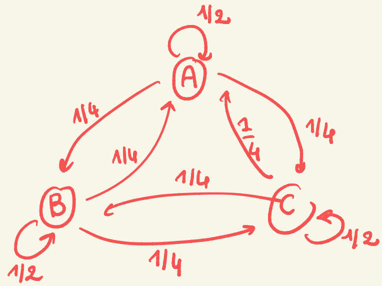
$= (1-p)^4 \times p + (1-p)^5$

$= (1-p)^4 [p + 1 - p]$

$= (1-p)^4$

Exercice 15

1.



$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. a) $a_0 = 1$; $b_0 = 0$; $c_0 = 0$

b) $a_1 = \mathbb{P}(A_1 \cap A_0) = \mathbb{P}(A_0)\,\mathbb{P}_{A_0}(A_1) = \frac{1}{2}$; $b_1 = \frac{1}{4}$; $c_1 = \frac{1}{4}$

c) (A_n, B_n, C_n) SCE donc proba totale,

d)
e) $\mathbb{P}(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$

$= a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times \frac{1}{4} + c_n \times \frac{1}{4}$

et de même pour les autres

f) Récurrence

3. $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

5. Récurrence

6. $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = 4 \times M^n \ldots$

7. $M = \frac{1}{4} A$

8.
9. $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = V_0 \times M^n$

$= \frac{1}{3\times 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \end{pmatrix}$

donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_n = \frac{1}{3\times 4^n}(4^n+2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{3} \\ b_n = \frac{1}{3\times 4^n}(4^n-1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right) \rightarrow \frac{1}{3} \\ c_n = b_n \end{cases}$ car $-1 < \frac{1}{4} < 1$

10. $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Exercice 16- **Inspiré d'un sujet de concours.** Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On note $n = a+b$. On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires. On effectue des tirages successifs de la manière suivante.

- Lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.
- Lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée par une boule blanche et l'on procède alors au tirage suivant.

Notons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, N_k l'évènement "On obtient une boule noire au k-ième tirage" et Y_k l'évènement "On obtient pour la première fois une boule blanche au k-ième tirage". Soit $k \in \{1,\ldots,b+1\}$ fixe dans tout ce problème.

1. Justifier l'égalité suivante :
$$Y_k = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap \overline{N}_k$$

   Soit $k \in \{1,\ldots,b+1\}$. Pour obtenir pour la première fois une boule blanche au k-ième tirage, il faut n'avoir obtenu que des boules noires au $k-1$ premières tirages et avoir obtenu une boule blanche au k-ième tirage. D'où
$$Y_k = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap \overline{N}_k$$

2. Donner $P(N_1)$.

   Au départ, dans l'urne, il y a a boule blanches et b boules noires et donc n boules au total. Comme le tirage est **uniforme**, la probabilité de tirer une boule noire à ce moment est donc
$$P(N_1) = \frac{b}{n}$$

3. Soit $i \in \{2,\ldots,k-1\}$.
   (a) Si les $i-1$ premiers tirages ont donné une boule noire, combien de boules noires y'a-t-il dans l'urne ? combien de boules au total y'a-t-il dans l'urne ?

   Soient $k \in \{1,\ldots,b+1\}$ et $i \in \{2,\ldots,k-1\}$. Si les $i-1$ premiers tirages ont donné une boule noire, comme chaque boule noire est remplacée par une boule blanche, alors il reste $b-(i-1)$ boules noires et $a+(i-1)$ boules blanches dans l'urne et ainsi toujours n boules au total.

   (b) En déduire
$$P_{N_1\cap\cdots\cap N_{i-1}}(N_i).$$

   Soient $k \in \{1,\ldots,b+1\}$ et $i \in \{2,\ldots,k-1\}$. En utilisant la Question 3(a), comme le tirage est **uniforme**, la probabilité de tirer une boule noire au i-ième tirage, sachant que l'on a obtenu que des boules noires pendant les $i-1$ premiers tirages, est de
$$P_{N_1\cap\cdots\cap N_{i-1}}(N_i) = \frac{b-(i-1)}{n}$$

4. De la même façon, en déduire
$$P_{N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(\overline{N}_k).$$

   Si les $k-1$ premiers tirages ont donné une boule noire, comme chaque boule noire est remplacée par une boule blanche, alors il reste $b-(k-1)$ boules noires et $a+(k-1)$ boules blanches dans l'urne et ainsi toujours n boules au total. Donc, comme le tirage est

uniforme, la probabilité de tirer une boule blanche au k-ième tirage, sachant que l'on a obtenu que des boules noires pendant les $k-1$ premiers tirages, est de

$$P_{N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(\overline{N}_k) = \frac{a+(k-1)}{n}.$$

5. En déduire, grâce à la formule des **probabilités composées**, que

$$P(Y_k) = \frac{(a+k-1)b!}{n^k(b-k+1)!}$$

En utilisant la Question 1 et la formule des **probabilités composées**, on a

$$P(Y_k) = P(N_1)\times P_{N_1}(N_2)\times P_{N_1\cap N_2}(N_3)\times P_{N_1\cap\cdots\cap N_{k-2}}(N_{k-1})\times P_{N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(\overline{N}_k)$$

Donc, en utilisant les résultats des Questions 2, 3(b) et 4, on obtient,

$$\begin{aligned}
P(Y_k) &= \frac{b}{n}\times\frac{b-1}{n}\times\cdots\times\frac{b-(k-2)}{n}\times\frac{a+(k-1)}{n}\\
&= \frac{b\times(b-1)\times\cdots\times(b-(k-2))\times(a+k-1)}{n^k}\\
&= \frac{b\times(b-1)\times\cdots\times(b-k+2))\times(b-k+1)\times(b-k)\times\cdots\times 2\times 1\times(a+k-1)}{n^k\times(b-k+1)\times(b-k)\times\cdots\times 2\times 1}\\
&= \frac{(a+k-1)b!}{n^k(b-k+1)!}
\end{aligned}$$

Exercice 17

Une société de location de vélos possède trois magasins, un à Rosnoën, un à Landerneau et un à Miliza. Lorsqu'un(e) client(e) loue un vélo, un jour donné, dans une des trois villes, il/elle le restitue le lendemain dans un des trois magasins, puis un autre client reprend le vélo et ainsi de suite. Une étude statistique a permis de montrer que, pour un vélo donné :

- s'il est loué à Rosnoën un certain jour, alors il est laissé le lendemain à Landerneau avec la probabilité $\frac{1}{4}$, tandis qu'il est laissé à Milizac avec la probabilité $\frac{3}{4}$,
- s'il est loué à Landerneau un certain jour, alors il est laissé le lendemain à Rosnoën avec la probabilité $\frac{1}{2}$, tandis qu'il est laissé à Milizac avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et à ramené à Landerneau avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- s'il est loué à Milizca, il est laissé à Rosnoën avec la probabilité $\frac{1}{2}$, laissé à Landerneau avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et ramené à Milizac avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout n, on note

R_n : "Le vélo se trouve à Rosnoën le n-ième jour"	et	$r_n = P(R_n)$
L_n : "Le vélo se trouve à Landerneau le n-ième jour"	et	$\ell_n = P(L_n)$
M_n : "Le vélo se trouve à Milizac le n-ième jour"	et	$m_n = P(M_n)$

On suppose qu'au départ, le jour 0, le vélo est à Rosnoën.

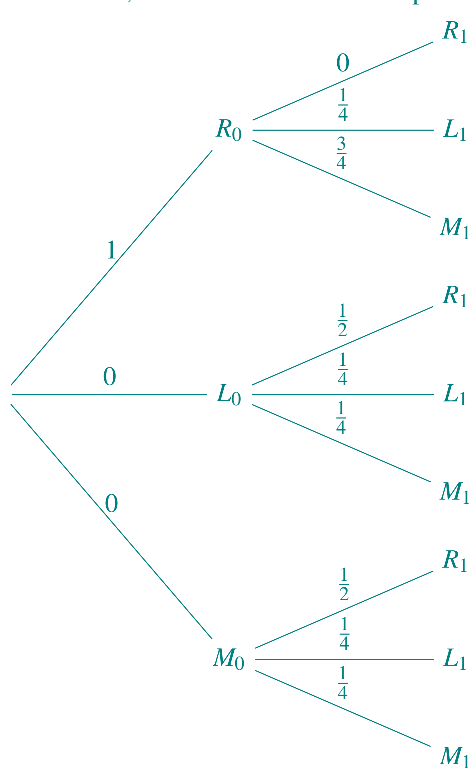
1. (a) Donner r_0, ℓ_0 et m_0.

   Au jour 0, le vélo se situe toujours à Rosnoën, donc nécessairement,

   $$\boxed{r_0 = 1, \qquad \ell_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad m_0 = 0.}$$

   (b) Tracer l'arbre des probabilités correspondant à ce qu'il se passe le jour 0 et le jour 1.

   En utilisant les données du texte, on obtient l'arbre suivant pour les jours 0 et 1.



   (c) Calculer r_1 et ℓ_1 et m_1.

   Comme le système (R_0, L_0, M_0) est un système complet d'évènements (le jour 0 le vélo se situe soit à Rosnoën, soit à Landerneau, soit à Milizac), par la **formule des**

probabilités totales, on a

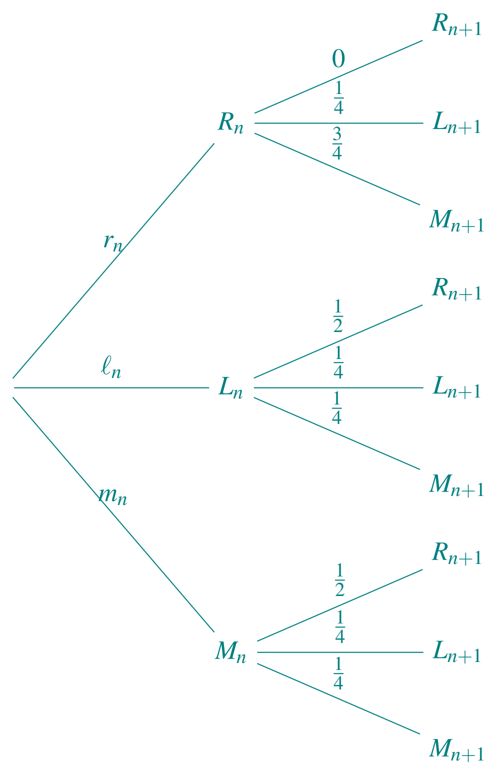
$$\begin{aligned}P(R_1) &= P(R_0)P_{R_0}(R_1) + P(L_0)P_{L_0}(R_1) + P(M_0)P_{M_0}(R_1)\\ &= 1\times 0 + 0\times\frac{1}{2} + 0\times 12\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{r_1 = 0.}$ De la même manière, on obtient que

$$\boxed{\ell_1 = \tfrac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad m_1 = \tfrac{3}{4}.}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Recopier l'arbre de probabilités ci-dessous et rajouter les probabilités correspondantes sur les différentes branches.

En utilisant les données du texte, on obtient,



(b) Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_{n+1} = \frac{1}{2}\ell_n + \frac{1}{2}m_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme le système (R_n, L_n, M_n) est un système complet d'évènements (le jour n le vélo se situe soit à Rosnoën, soit à Landerneau, soit à Milizac), par la **formule des probabilités totales**, on a

$$\begin{aligned}P(R_{n+1}) &= P(R_n)P_{R_n}(R_{n+1}) + P(L_n)P_{L_n}(R_{n+1}) + P(M_n)P_{M_n}(R_{n+1})\\ &= r_n \times 0 + \ell_n \times \frac{1}{2} + m_n \times 12\end{aligned}$$

Donc, finalement,

$$\boxed{r_{n+1} = \tfrac{1}{2}\ell_n + \tfrac{1}{2}m_n.}$$

(c) Déterminer une relation analogue entre ℓ_{n+1} et r_n, ℓ_n et m_n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. De manière analogue, comme le système (R_n, L_n, M_n) est un système complet d'évènements (le jour n le vélo se situe soit à Rosnoën, soit à Landerneau, soit à Milizac), par la **formule des probabilités totales**, on a

$$\begin{aligned}\ell_{n+1} &= P(R_n)P_{R_n}(L_{n+1}) + P(L_n)P_{L_n}(L_{n+1}) + P(M_n)P_{M_n}(L_{n+1}) \\ &= r_n \times \frac{1}{4} + \ell_n \times \frac{1}{4} + m_n \times 14 \\ &= \frac{1}{4}r_n + \frac{1}{4}\ell_n + \frac{1}{4}m_n.\end{aligned}$$

Donc, finalement,

$$\boxed{\ell_{n+1} = \tfrac{1}{4}r_n + \tfrac{1}{4}\ell_n + \tfrac{1}{4}m_n.}$$

(d) Déterminer une relation analogue entre m_{n+1} et r_n, ℓ_n et m_n.

De la même manière, on obtient que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad m_{n+1} = \tfrac{3}{4}r_n + \tfrac{1}{4}\ell_n + \tfrac{1}{4}m_n.}$$

3. On introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la notation

$$U_n = \begin{pmatrix} r_n \\ \ell_n \\ m_n \end{pmatrix}.$$

(a) Donner U_0.

En utilisant la question 1(a), on a

$$\boxed{U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

(b) À l'aide des questions 2(b), 2(c) et 2(d), déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_{n+1} = AU_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide des questions 2(b), 2(c) et 2(d), on a

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ \ell_{n+1} \\ m_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ell_n + \frac{1}{2}m_n \\ \frac{1}{4}r_n + \frac{1}{4}\ell_n + \frac{1}{4}m_n \\ \frac{3}{4}r_n + \frac{1}{4}\ell_n + \frac{1}{4}m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_n \\ \ell_n \\ m_n \end{pmatrix} = AU_n,$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Démontrer alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = A^n U_0.$$

Montrons, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $U_n = A^n U_0$ » est vraie.

- *Initialisation* : Montrons que $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que $U_0 = A^0 U_0$. Par convention $A^0 = I_3$. Donc, on a bien $U_0 = A^0 U_0$. Donc la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité* : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que $U_n = A^n U_0$. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $U_{n+1} = A^{n+1} U_0$. Par construction (cf. question 3(b)),
$$U_{n+1} = AU_n.$$
Donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient
$$U_{n+1} = AU_n = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0.$$
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion* : Donc, par principe de récurrence, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = A^n U_0.}$$

4. On considère la matrice
$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que pour tout $B \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, l'équation $PX = B$ admet une unique solution $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En déduire que P est inversible et expliciter P^{-1}.

Soient
$$B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

On a
$$\begin{aligned}
PX = B \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x + y = \alpha \\ 3x + z = \beta \\ 5x - y - z = \gamma \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x + y = \alpha \\ -\frac{3}{4}y + z = \beta - \frac{3}{4}\alpha & L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{4}L_1 \\ -\frac{9}{4}y - z = \gamma - \frac{5}{4}\alpha & L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{4}L_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x - y = \alpha \\ -\frac{4}{3}y + z = \beta - \frac{4}{3} \\ -4z = \alpha - 3\beta + \gamma & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x - y = \alpha \\ -\frac{4}{3}y + z = \beta - \frac{4}{3} \\ z = -\frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta - \frac{1}{4}\gamma \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x - y = \alpha \\ y = \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta - \frac{1}{3}\gamma \\ z = -\frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta - \frac{1}{4}\gamma \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{12}\alpha + \frac{1}{12}\beta + \frac{1}{12}\gamma \\ y = \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta - \frac{1}{3}\gamma \\ z = -\frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta - \frac{1}{4}\gamma \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\text{l'équation } PX = B \text{ admet une unique solution}}$ donnée par

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}\alpha + \frac{1}{12}\beta + \frac{1}{12}\gamma \\ \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta - \frac{1}{3}\gamma \\ -\frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta - \frac{1}{4}\gamma \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

On en déduit que P est inversible et que

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.}$$

(b) On note $D = P^{-1}AP$. Montrer que $A = PDP^{-1}$.

Comme P est inversible, on peut multiplier la relation $D = P^{-1}AP$ à gauche par la matrice P pour obtenir,

$$PD = PP^{-1}AP = AP,$$

car $PP^{-1} = I_3$. De même, en multipliant par P^{-1} la relation précédente, on obtient

$$\boxed{PDP^{-1} = A.}$$

(c) Montrer que D est une matrice diagonale.

En effectuant deux produits matriciels, on a

$$\begin{aligned}
\boxed{D} &= P^{-1}AP \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&\boxed{= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

(d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de D^n.

En utilisant l'expression de D donnée à la question 4(c), par une récurrence immédiate, on obtient que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

(e) Montrer par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1}.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathscr{P}(n) : « A^n = PD^nP^{-1} »$$

est vraie.

- *Initialisation.* Montrons que $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que $A^0 = PD^0P^{-1}$. D'une part $A^0 = I_3$. D'autre part, $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_3$. Donc la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire que

  $$A^n = PD^nP^{-1}.$$

  Montrons que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

  $$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

D'après la question 4(b), on a $A = PDP^{-1}$, donc,

$$A^{n+1} = A^n \times A = A^n PDP^{-1}.$$

Puis, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$A^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Donc la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion.* Donc, par principe de récurrence, on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.}$$

(f) En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide des questions 4(d) et 4(e), on obtient

$$\begin{aligned} \boxed{A^n} &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\boxed{= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

(g) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de U_n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le résultat de la question 3(c), l'expression de U_0 donnée à la question 3(a) et l'expression de A^n donnée à la question 4(f), on obtient que

$$U_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que

$$\boxed{U_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}}$$

5. (a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_n, ℓ_n et m_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la question 4(g), et par définition du vecteur U_n, on a

$$\boxed{r_n = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \qquad \ell_n = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad m_n = \frac{5}{12}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n.}$$

(b) Vérifier que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_n + \ell_n + m_n = 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le résultat de la question 5(a), on a

$$\boxed{r_n + \ell_n + m_n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} - \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12}$$
$$\boxed{= 1}$$

(c) Déterminer les limites des suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Par propriété sur les suites géométriques,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \qquad \text{car} \qquad -1 < -\frac{1}{2} < 1.$$

Donc, en utilisant les expressions des suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trouvées à la question 5(a), on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} r_n = \tfrac{1}{3}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} m_n = \tfrac{5}{12}.}$$

Et, comme $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante, on a directement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \ell_n = \tfrac{1}{4}.}$$

6. (a) Si le vélo se trouve à Landerneau le deuxième jour, quelle est la probabilité qu'il se trouve à Milizac le premier jour ?

On cherche à calculer $P_{L_2}(M_1)$. Par la **formule de Bayes**, on a

$$P_{L_2}(M_1) = \frac{P(M_1)P_{M_1}(L_2)}{P(L_2)}.$$

Or d'après l'énoncé,

$$P_{M_1}(L_2) = \frac{1}{4}.$$

Puis, en utilisant le résultat de la question 5(a), on a

$$P(M_1) = m_1 = \frac{3}{4} \qquad \text{et} \qquad P(L_2) = \ell_2 = \frac{1}{4}.$$

Finalement, on a On cherche à calculer $P_{L_2}(M_1)$. Par la **formule de Bayes**, on a

$$P_{L_2}(M_1) = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}.$$

Si le vélo se trouve à Landerneau le deuxième jour, quelle est la probabilité qu'il se trouve à Milizac le premier jour est de $\boxed{\tfrac{3}{4}.}$

(b) Le fait que le vélo se trouve à Landerneau le premier jour est-il indépendant du fait qu'il se trouve à Milizac le deuxième jour ?

On se demande si $P(M_2) = P_{L_1}(M_2)$. Pour cela, on va calculer les deux probabilités.
D'une part, d'après l'énoncé,

$$P_{L_1}(M_2) = \frac{1}{4}.$$

D'autre part, en utilisant le résultat de la question 5(a), on a

$$P(M_2) = m_2 = \frac{5}{12} - \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Comme $P(M_2) = P_{L_1}(M_2)$, $\boxed{\text{les deux évènements sont indépendants.}}$