DS 3

Concours Blanc 1 : CORRECTION

Exercice 1 – Adapté d'ECRICOME 2013, Maths E. On désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 3 à coefficients réels et par 0_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix}$$

ainsi que le polynôme R défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad R(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3.$$

1. Montrer que R' (la dérivée de R) admet deux racines réelles distinctes r_1, r_2 avec $r_1 < r_2$ que l'on explicitera.

La fonction polynomiale R est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad R'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

La dérivée R' est un polynôme du **second degré**. Ainsi, pour trouver ses racines, on calcule le discriminant associé à l'équation $R'(x) = 0$:

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 9 = 144 - 108 = 36.$$

Comme $\Delta > 0$, le polynôme R' admet $\boxed{\text{deux racines réelles}}$ données par

$$\boxed{r_1} = \frac{12 - \sqrt{36}}{2 \times 3} \boxed{= 1} \qquad \text{et} \qquad \boxed{r_2} = \frac{12 + \sqrt{36}}{2 \times 3} \boxed{= 3}$$

2. Dresser le tableau de variations de R en y ajoutant les valeurs de R en r_1 et r_2 et les limites de R en $\pm\infty$.

D'après la question précédente, la **dérivée** de R est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad R'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

On peut donc tracer le tableau de signe de R' (car **polynôme de second degré**) puis en déduire le tableau de variations de R.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$R'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
R	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Dans ce tableau, on a ajouté les valeurs de R en $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$, calculées ci-dessous :

$$\boxed{R(1)} = 1^3 - 6 \times 1^2 + 9 \times 1 - 3 \boxed{= 1}$$
$$\boxed{R(3)} = 1^3 - 6 \times 1^2 + 9 \times 1 - 3 \boxed{= -3}$$

On a également rajouté les limites en $\pm\infty$, calculées ci-dessous grâce à la factorisation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad R(x) = x^3 \times \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)$$

Or,

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{3}{x^3} = 1 \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} R(x) = +\infty}$$

Et de même,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} R(x) = -\infty}$$

On admet que le polynôme R admet trois racines a, b, c avec

$$0 < a < r_1 < b < r_2 < c.$$

On ne cherchera pas à calculer ces trois racines.

3. Soit λ un réel. On pose

$$X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$AX_\lambda - \lambda X_\lambda = 0_{3,1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad R(\lambda) = 0$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Commençons par expliciter la matrice $AX_\lambda - \lambda X_\lambda$:

$$\begin{aligned} AX_\lambda - \lambda X_\lambda &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ 3 - 9\lambda + 6\lambda^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 - 9\lambda + 6\lambda^2 + \lambda^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, en **identifiant les coefficients**

$$\boxed{AX_\lambda - \lambda X_\lambda = 0_{3,1}} \quad \Longleftrightarrow \quad 3 - 9\lambda + 6\lambda^2 + \lambda^3 = 0 \quad \boxed{\Longleftrightarrow \quad R(\lambda) = 0}$$

4. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AM + MA = 0_3$. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AM + MA = 0_3$. *On admet qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$ et avec*

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que $DM' + M'D = 0_3$ où l'on a posé $M' = P^{-1}MP$.

   Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AM + MA = 0_3$. On a

$$\begin{aligned} AM + MA = 0_3 \quad &\text{donc} \quad PDP^{-1}M + MPDP^{-1} = 0_3 && \text{car } A = PDP^{-1} \\ &\text{donc} \quad DP^{-1}M + P^{-1}MPDP^{-1} = 0_3 && \text{en multipliant à gauche par } P^{-1} \\ &\text{donc} \quad DP^{-1}MP + P^{-1}MPD = 0_3 && \text{en multipliant à droite par } P \\ &\text{donc} \quad \boxed{DM' + M'D = 0_3} && \text{car } M' = P^{-1}MP \end{aligned}$$

(b) On note

$$M' = \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix}$$

Déterminer les neuf coefficients de la matrice $DM' + M'D$.

En effectuant le **produit matriciel**, on a

$$\boxed{DM' + M'D = \begin{pmatrix} 2ap & aq+bq & ar+cr \\ as+bs & 2bt & bu+cu \\ av+cv & bw+cw & 2cx \end{pmatrix}}$$

(c) En déduire que $M' = 0_3$ puis que $M = 0_3$.

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AM + MA = 0_3$. *D'après la question* ***4a***, on a,

$$DM' + M'D = 0_3$$

Or, *d'après la question* ***4b***, on a

$$DM' + M'D = \begin{pmatrix} 2ap & aq+bq & ar+cr \\ as+bs & 2bt & bu+cu \\ av+cv & bw+cw & 2cx \end{pmatrix}$$

Donc par **identification des coefficients**, on obtient

$$\begin{cases} 2ap & = & 0 \\ (a+b)q & = & 0 \\ (a+c)r & = & 0 \\ (a+b)s & = & 0 \\ 2bt & = & 0 \\ (b+c)u & = & 0 \\ (a+c)v & = & 0 \\ (b+c)w & = & 0 \\ 2cx & = & 0 \end{cases}$$

Or, $a, b, c > 0$ donc à fortiori, $a+b, a+c, b+c > 0$. On en déduit que

$$\begin{cases} p & = & 0 \\ q & = & 0 \\ r & = & 0 \\ s & = & 0 \\ t & = & 0 \\ u & = & 0 \\ v & = & 0 \\ w & = & 0 \\ x & = & 0 \end{cases}$$

Et donc que $M' = 0_3$. Or $M' = P^{-1}MP$. Donc en multipliant successivement à gauche par P puis à droite par P^{-1}, on obtient que

$$\boxed{M = 0_3.}$$

Exercice 2 – Adapté d'ECRICOME 2015, Maths E. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par,

$$u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ u_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-u_n}$$

1. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$$

(a) Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f.

- Étude de la limite en $-\infty$. D'après les **limites usuelles**, on a,

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

Donc, **par somme**, on obtient que,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.}$$

- Étude de la limite en $+\infty$. En **factorisant**, on obtient,

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = \mathrm{e}^x\left(1 - \frac{x}{\mathrm{e}^x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$$

Or, par **croissances comparées**, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$$

et par opérations sur les **limites usuelles**, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$$

Donc, **par somme**,

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{x}{\mathrm{e}^x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 1$$

Enfin, par **limite usuelle**,

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

Donc, finalement, **par multiplication**,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

(b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa **dérivée** est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

De plus,

$$f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{e}^x = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0,$$

ainsi que,

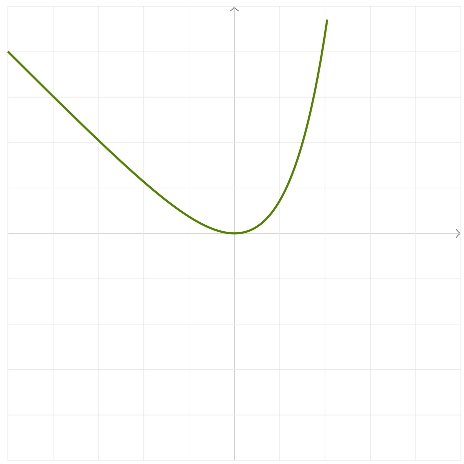
$$f'(x) > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{e}^x > 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > 0,$$

On peut ainsi tracer le tableau de signe de la dérivée f' et en déduire le tableau de variations de la fonction f (en rajoutant les limites trouvées à la *question 1a*).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(c) Dresser l'allure de la courbe de f.

Grâce au tableau de variations de la fonction f de la *question 1b*, on peut en déduire l'allure suivante pour la courbe de la fonction f.



(d) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x \geqslant x + 1$$

D'après la question 1b, on en déduit que f admet un **minimum** (en 0) qui vaut 0, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) \geqslant 0$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x \geqslant x + 1}$$

(e) Grâce à la question 1b, résoudre l'équation

$$e^x = x + 1$$

D'après la question 1b, on en déduit que f admet un **minimum** qui vaut 0 uniquement atteint en 0, donc

$$f(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0$$

c'est-à-dire

$$\boxed{e^x = x + 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0}$$

2. Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n > 0$$

Montrons par **récurrence** que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathcal{P}(n) \ \text{"}u_n > 0\text{"} \qquad \text{est vraie}$$

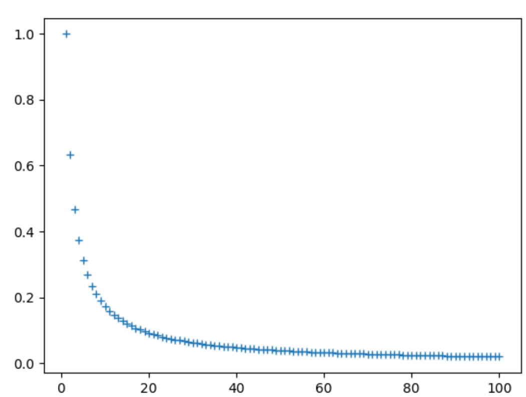
- Initialisation. Montrons que $\mathcal{P}(1)$ est vraie. D'après l'énoncé, $u_1 = 1 > 0$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- Hérédité. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire on suppose que
$$u_n > 0$$
Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que
$$u_{n+1} > 0$$
On a
$$\begin{array}{lll} & u_n > 0 & \text{par hypothèse de récurrence} \\ \text{donc} & -u_n < 0 & \\ \text{donc} & \mathrm{e}^{-u_n} < 1 & \text{car } x \mapsto e^x \text{ croissante sur } \mathbb{R} \\ \text{donc} & -\mathrm{e}^{-u_n} > -1 & \\ \text{donc} & 1-\mathrm{e}^{-u_n} > 0 & \\ \text{donc} & u_{n+1} > 0 & \text{en utilisant la relation de récurrence de l'énoncé} \end{array}$$
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion. Par principe de récurrence, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n > 0}$$

3. Recopier et compléter le programme `Python` suivant qui permet de calculer les cent premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$:

```python
import numpy as np
u = 1
print(u)
for n in range(2, 101):
    u = 1-np.exp(-u)
    print(u)
```

4. On a représenté ci-dessous les cent premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.



Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la monotonie et la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$?

On peut conjecturer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est $\boxed{\text{décroissante}}$ et $\boxed{\text{tend vers } 0}$.

5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. *On pourra s'aider de la question 5c.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la relation de récurrence de l'énoncé, on a :
$$u_{n+1} - u_n = 1 - \exp(-u_n) - u_n$$

Or, d'après la question **5c**, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^{x} - x - 1 \geqslant 0.$$

Donc, on obtient

$$e^{-u_n} - (-u_n) - 1 \geqslant 0$$

c'est-à-dire

$$1 - u_n - e^{-u_n} \leqslant 0$$

c'est-à-dire

$$\boxed{u_{n+1} - u_n \leqslant 0}$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est $\boxed{\text{décroissante}}$.

6. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite finie que l'on notera ℓ.

   La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante (cf question **5**) et minorée par 0 (cf question **2**). Donc, d'après le **théorème de la limite monotone**, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ $\boxed{\text{converge}}$ vers une $\boxed{\text{limite finie}}$ que l'on notera ℓ.

7. Déterminer la valeur de la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

   D'après l'énoncé,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$$

   Or, *d'après la question précédente*, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite finie notée ℓ. Donc, en **passant à la limite dans cette relation,** on obtient

$$\ell = 1 - e^{-\ell}$$

   c'est-à-dire

$$e^{-\ell} = (-\ell) + 1$$

   *D'après la question **1e***, la seule solution de cette équation est 0 donc,

$$-\ell = 0$$

   c'est-à-dire

$$\ell = 0.$$

   Donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ $\boxed{\text{converge vers } 0}$.

Exercice 3 – Adapté d'ECRICOME 2020, Maths T.

Partie I

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 7u_{n+1} + 8u_n.$$

1. Recopier et compléter les lignes 5 à 9 incomplètes du script Python ci-dessous pour qu'il crée et renvoie la liste $L = [u_0, u_1, u_2, \dots, u_n]$ pour n entier naturel entré par l'utilisateur.

```
1  n = .... #à compléter par l'utilisateur
2  u = 0
3  v = 1
4  L = [u, v]
5  for k in range(2, n+1):
6          aux = v
7          v = 7*v+8*u
8          u = aux
9          L.append(u)
10 print(L)
```

2. On définit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad s_n = u_{n+1} + u_n$$

(a) Que vaut s_0 ?

On a :

$$\boxed{s_0} = u_1 + u_0 = 1 + 0 \boxed{= 1.}$$

(b) Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 8.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= u_{n+2} + u_{n+1} && \text{par déf de la suite } (s_n) \\ &= 7u_{n+1} + 8u_n + u_{n+1} && \text{grâce à la relation de rec sur } (u_n) \\ &= 8(u_{n+1} + u_n) \\ &= 8s_n && \text{par déf de la suite } (s_n) \end{aligned}$$

Donc, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite $\boxed{\text{géométrique}}$ de $\boxed{\text{raison 8.}}$

(c) En déduire l'expression de s_n en fonction de n.

La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **géométrique** de raison 8 (cf question 2b) et de premier terme $s_0 = 1$ (cf question 2a). Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ s_n = 8^n.}$$

3. On pose pour tout entier naturel n :

$$v_n = (-1)^n u_n \qquad \text{et} \qquad t_n = v_n - v_{n+1}$$

(a) Exprimer t_n en fonction de s_n pour tout entier naturel n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\boxed{t_n} &= v_n - v_{n+1} && \text{par déf de la suite } (t_n) \\
&= (-1)^n u_n - (-1)^{n+1} u_{n+1} && \text{par déf de la suite } (v_n) \\
&= (-1)^n (u_n - (-1) u_{n+1}) \\
&= (-1)^n (u_n + u_{n+1}) \\
&\boxed{= (-1)^n s_n} && \text{par déf de la suite } (s_n)
\end{aligned}$$

(b) En déduire que pour tout $n \geqslant 0$, on a $t_n = (-8)^n$.

En utilisant l'expression de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *trouvée à la question 2c* et la relation *trouvée à la question 3a*, on obtient,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad t_n} = (-1)^n s_n = (-1)^n \times 8^n \boxed{= (-8)^n}$$

4. Soit n un entier naturel non nul.

(a) Calculer la somme

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On reconnaît une **somme géométrique**. On obtient donc :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i} = \frac{1 - (-8)^n}{1 - (-8)} \boxed{= \frac{1 - (-8)^n}{9}}$$

(b) Justifier que :

$$\sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1}) = -v_n$$

.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par **télescopage**, on a :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1})} = v_0 - v_{n-1+1} \boxed{= -v_n}$$

car $v_0 = (-1)^0 s_0 = s_0 = 0$.

(c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{v_n} &= -\sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1}) && \textit{d'après la question précédente} \\
&= -\sum_{i=0}^{n-1} t_i && \text{par définition de la suite } (t_n) \\
&= -\sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i && \textit{d'après la question 3b} \\
&\boxed{= \frac{-1 + (-8)^n}{9}} && \textit{d'après la question 4b}
\end{aligned}$$

Comme v_0, la formule précédente est également valable pour $n = 0$.

(d) Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{(-1)^{n+1} + 8^n}{9}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{u_n} &= \frac{v_n}{(-1)^n} && \text{par définition de la suite } (v_n) \\
&= (-1)^n v_n \\
&= (-1)^n \times \frac{-1+(-8)^n}{9} && \textit{d'après la question précédente} \\
&= \frac{(-1)^n \times (-1) + (-1)^n \times (-8)^n}{9} \\
&\boxed{= \frac{(-1)^{n+1} + \times 8^n}{9}}
\end{aligned}$$

Partie II

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note 0_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5. Montrer que $M^2 - 7M - 8I = 0_3$.

Tout d'abord, en effectuant le **produit matriciel**, on obtient,

$$M^2 = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix}$$

Puis, en effectuant la **somme**, on obtient,

$$\boxed{M^2 - 7M - 8I} = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 21 & 21 \\ 21 & 14 & 21 \\ 21 & 21 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \boxed{= 0_3}$$

6. En déduire que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de M et de I.

En utilisant la *relation de la question 5*, on obtient,

$$\begin{aligned}
M^2 - 7M - 8I = 0_3 \ &\text{donc } \ M^2 - 7M = 8I \\
&\text{donc } \ \frac{1}{8}M^2 - \frac{7}{8}M = I \\
&\text{donc } \ M\left(\frac{1}{8}M - \frac{7}{8}I\right) = I.
\end{aligned}$$

On en déduit que M est $\boxed{\text{inversible}}$ et que

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{8}M - \frac{7}{8}I}$$

7. (a) On pose : $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Vérifier que : $M^0 = a_0M + b_0I$.

D'une part, par convention

$$M^0 = I$$

Puis, par définition de a_0 et b_0, on obtient,

$$a_0M + b_0I = I$$

D'où

$$\boxed{M^0 = a_0M + b_0I}$$

(b) Déterminer deux réels a_1 et b_1 tels que : $M^1 = a_1M + b_1I$.

En posant $\boxed{a_1 = 1}$ et $\boxed{b_1 = 0}$, on obtient directement que

$$a_1M + b_1I = M = M^1.$$

(c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M^n = u_nM + 8u_{n-1}I$$

où (u_n) est la suite définie dans la Partie I.

Montrons par **récurrence** que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété

$$\mathcal{P}(n): \qquad "M^n = u_nM + 8u_{n-1}I"$$

est vraie.

- Initialisation. Montrons que $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Comme $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on a

$$u_1M + 8u_0I = M = M^1$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- Hérédité. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire on suppose que

$$M^n = u_nM + 8u_{n-1}I$$

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que

$$M^{n+1} = u_{n+1}M + 8u_nI$$

On a

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= M \times M^n \\
&= M \times (u_nM + 8u_{n-1}I) && \text{d'après l'hyp de récurrence} \\
&= u_nM^2 + 8u_{n-1}M \\
&= u_n(7M + 8I) + 8u_{n-1}M && \textit{d'après la question } 5 \\
&= (7u_n + 8u_{n-1})M + 8u_nI \\
&= (7u_n + 8u_{n-1})M + 8u_nI \\
&= u_{n+1}M + 8u_nI && \text{d'après la relation de rec de la suite } (u_n)
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion. Par principe de récurrence, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad M^n = u_nM + 8u_{n-1}I}$$

(d) En déduire, sous la forme d'une matrice, l'expression de M^n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question **7c**, on a,

$$M^n = u_n M + 8u_{n-1} I$$

Puis, en utilisant l'expression de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée à la *question **4d***, on a

$$M^n = \frac{(-1)^{n+1} + \times 8^n}{9} M + 8\frac{(-1)^n + \times 8^{n-1}}{9} I$$

En effectuant le calcul, on obtient,

$$\boxed{M^n = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7\times(-1)^n + 3\times 8^n & -3\times(-1)^n + 3\times 8^n & -3\times(-1)^n + 3\times 8^n \\ -3\times(-1)^n + 3\times 8^n & 7\times(-1)^n + 3\times 8^n & -3\times(-1)^n + 3\times 8^n \\ -3\times(-1)^n + 3\times 8^n & -3\times(-1)^n + 3\times 8^n & 7\times(-1)^n + 3\times 8^n \end{pmatrix}}$$

Exercice 4 – Adapté d'EML 1993, Maths E. Soit

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \end{array}$$

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$. *On admet que f est également dérivable sur $\mathbb{R}$.*

   La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est une fonction polynomiale et donc définie sur $\mathbb{R}$. De plus,

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$$

   Or la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$. Donc par composition, la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus,

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sqrt{x^2+1} > 0$$

   Donc, par quotient, puis différence, la fonction f est bien $\boxed{\text{définie sur } \mathbb{R}}$.

2. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   Soit $x > 0$. Dans ce cas, $\sqrt{x^2} = x$ et donc f peut se **factoriser** de la manière suivante,

   $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \\ &= \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} - 1 \\ &= \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1 \\ &= \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1 \\ &= \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1 \end{aligned}$$

   Or,

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

   Donc

   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)} = \frac{1}{\sqrt{1}} - 1 \boxed{= 0}$$

   (b) Que vaut $\sqrt{x^2}$ si $x < 0$?

   Ona

   $$\boxed{\forall x < 0, \qquad \sqrt{x^2} = -x}$$

   (De manière générale, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.)

(c) Justifier que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$.

Soit $x < 0$. Dans ce cas, $\sqrt{x^2} = -x$. Donc, avec le même *calcul qu'à la question* 2*a*, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1 \\ &= \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1 \\ &= -\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+1\frac{1}{x^2}}} - 1 \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1}} - 1 \boxed{= -2}$$

3. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (admis) et sa dérivée est donnée par,

$$\begin{aligned} \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x)} &= \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}(x+1)}{(\sqrt{x^2+1})^2} \\ &= \frac{\frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \\ &= \frac{\frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \\ &\boxed{= \frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)}} \end{aligned}$$

4. Former le tableau de variation de f.

<u>Soit $x \in \mathbb{R}$</u>. On a $\sqrt{x^2+1}(x^2+1) > 0$ donc, *d'après la question 3*, $f'(x)$ est du signe de $1-x$. Ainsi, on peut tracer le tableau de signe de la **dérivée** f' et ainsi en déduire le tableau de variations de la fonction f comme suit.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-2	$\nearrow$	$\sqrt{2}-1$	$\searrow$	0

5. (a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) - x = \frac{(x+1)(1-\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{f(x)-x} &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 - x \\
&= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{x+1-\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{(x+1)-\sqrt{x^2+1}(x+1)}{\sqrt{x^2+1}} \\
&\boxed{= \frac{(x+1)(1-\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}}
\end{aligned}$$

(b) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant le *calcul de la question précédente*, on obtient,

$$\begin{aligned}
\boxed{f(x) = x} \quad &\iff \quad f(x) - x = 0 \\
&\iff \quad \frac{(x+1)(1-\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \\
&\iff \quad (x+1)(1-\sqrt{x^2+1}) = 0 \\
&\iff \quad x+1 = 0 \ \text{ ou } \ 1-\sqrt{x^2+1} = 0 \\
&\iff \quad x = -1 \ \text{ ou } \ \sqrt{x^2+1} = 1 \\
&\iff \quad x = -1 \ \text{ ou } \ x^2+1 = 1 \\
&\iff \quad x = -1 \ \text{ ou } \ x^2 = 0 \\
&\boxed{\iff \quad x = -1 \ \text{ ou } \ x = 0}
\end{aligned}$$

(c) Démontrer que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sqrt{x^2+1} \geqslant 1$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}
& x^2 \geqslant 0 \\
\text{donc} \quad & x^2 + 1 \geqslant 1 \\
\text{donc} \quad & \boxed{\sqrt{x^2+1} \geqslant 1} \qquad \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ croissante sur } [0, +\infty[
\end{aligned}$$

(d) En déduire le tableau de signe de $f(x) - x$. *On vérifiera que* $f(x) - x \geqslant 0$ *sur* $]-\infty, -1]$.

Grâce aux questions **5a** *et* **5c**, on peut tracer le tableau de signe de $x \mapsto f(x) - x$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-\sqrt{x^2+1}$		$-$		$-$	0	$-$	
$\sqrt{x^2+1}$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$-$	

(e) En déduire la position relative de la courbe de f et de la droite Δ d'équation $y = x$.

La $\boxed{\text{courbe de } f \text{ est au dessus de } \Delta \text{ sur }]-\infty,-1[}$ et $\boxed{\text{en dessous sur } [-1,+\infty[}$. Elles se coupent aux abscisses -1 et 0.