TD 03 – Calculs de dérivées

Exercice 1 – Calculs de dérivées. Calculer la dérivée des fonctions suivantes, en précisant l'ensemble de définition de la fonction et son ensemble de dérivabilité.

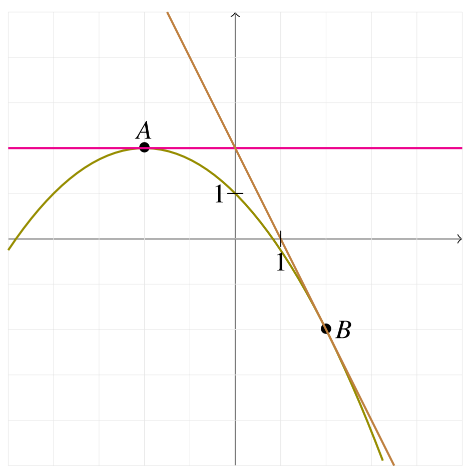
1. $x \mapsto 13x^2 + 3x - 49$	2. $x \mapsto \frac{1}{3x}$
3. $x \mapsto \frac{3}{4x+2}$	4. $x \mapsto \sqrt{x+1}$
5. $x \mapsto (-x+6)(3x-2)$	6. $x \mapsto \frac{4x+8}{21x-3}$
7. $x \mapsto \exp(x^2)$	8. $x \mapsto \frac{1}{x^2}$
9. $x \mapsto \frac{1+x}{1+e^x} - x$	10. $x \mapsto \ln\left(2x - \frac{3}{x}\right)$
11. $x \mapsto \frac{e^{2x}}{x^2-1}$	12. $x \mapsto 1 + \ln(1+x)$

Exercice 2 – Sur la notion de tangente. On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-5,5]$ par

$$\text{pour tout } x \in [-5,5], \qquad f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 2$$

Les tangentes à la courbe en A et B ont été tracées.

1. Déterminer graphiquement $f'(-2)$ et $f'(2)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse -4. La représenter graphiquement.



Exercice 3 – Sur la notion de tangente. On considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{5x}{x^2+1}$$

1. Montrer que, pour tout réel a, les tangentes aux points d'abscisses respectives a et $-a$ sont parallèles.
2. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des tangentes horizontales ?

Exercice 4 – Ecricome ECE 2023. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x-1}{2x} f(x).$$

Exercice 5 – EMLyon, Maths E 2014. *Si f est une fonction dérivable 3 fois, on note f' sa dérivée, f'' la dérivée de f' (et donc la dérivée second de f) et enfin f''' la dérivée de f'' (et donc la dérivée troisième de f.)* On considère l'application φ définie sur $]0,+\infty[$ par,

$$\text{pour tout } x \in]0,+\infty[, \qquad \varphi(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

Montrer que,

$$\text{pour tout } x \in]0,+\infty[, \qquad \varphi'''(x) = \mathrm{e}^x + \frac{3x+1}{x^5}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 6 – Des formules pour des sommes finies. Soient $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que,
$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$
2. En déduire une formule pour la somme suivante,
$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}.$$

Exercice 7 – HEC 2015. Soient a un réel non nul, b un réel et $x : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$\forall t \geqslant 0, \qquad x'(t) = ax(t) + b.$$

1. Calculer la dérivée de la fonction y définie par,
$$\forall t \geqslant 0, \qquad y(t) = \left(x(t) + \frac{b}{a}\right)\exp(-at)$$
2. En déduire que,
$$\forall t \geqslant 0, \qquad x(t) = -\frac{b}{a} + \left(x(0) + \frac{b}{a}\right)\exp(at)$$

Exercice 8 – Ecricome 1996. On définit la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par, pour tout $x > 0$, $f(x) = x^x$. Calculer la dérivée de la fonction f.

Exercice 9 – EMLyon Maths E, 2015. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \begin{cases} n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} x < 0 \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \geqslant 0$,

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)$$

Exercice 10 – ECRICOME 2010, Maths S. Soit (α,β,γ) solution du système

$$(S) \qquad \begin{cases} 2\alpha(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta) &= 2\alpha-\beta-\gamma \\ 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) &= 2\beta-\alpha-\gamma \\ 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) &= 2\gamma-\alpha-\beta \end{cases}$$

On introduit le polynôme Q, défini par,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

Montrer que (α,β,γ) est solution de (S) si et seulement si le polynôme $x \mapsto Q''(x) - 4xQ'(x)$ admet pour racines α,β,γ.