

TD 17 – CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

Étude de la continuité

Exercice 1 – [S'inspirer des Exemples 1.8 et 1.9, Chapitre 17]

Étudier la continuité des fonctions suivantes:

$$1. f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$2. h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \sqrt{-3x+2} & \text{si } x < \frac{2}{3} \\ 3x-2 & \text{si } x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$3. g:]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 3 & \text{si } x = 1 \\ \ln(x-1) & \text{si } 1 < x < 2 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$4. i: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ 1 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

1. Étude de la continuité de f sur \mathbb{R} .

- La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ par composition, car $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et la fonction exponentielle est continue sur \mathbb{R} .
- De même, la fonction f est continue sur $] -\infty, 0[$.
- Il reste à étudier la continuité de f en 0. Par composition,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq f(1).$$

Donc la fonction f n'est pas continue en 0.

2. Étude de la continuité de h sur \mathbb{R} .

- La fonction h est bien définie et continue sur $] -\infty, \frac{2}{3}[$ par composition, car, pour tout $x \in] -\infty, \frac{2}{3}[$, $-3x + 2 \geq 0$, $x \mapsto -3x + 2$ est continue sur \mathbb{R} et $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- La fonction h est continue sur $]\frac{2}{3}, +\infty[$ en tant que fonction polynomiale.
- Il reste à étudier la continuité de h en $\frac{2}{3}$. Par composition, et continuité de la racine carrée,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} h(x) = \sqrt{-3 \times \frac{2}{3} + 2} = 0 = h\left(\frac{2}{3}\right) = 0.$$

Donc la fonction f est continue en $\frac{2}{3}$.

3. Étude de la continuité de g sur $[1, +\infty[$.

- La fonction g est bien définie et continue sur $]1, 2[$ par composition, car pour tout $x \in]1, 2[$, $x - 1 > 0$, $x \mapsto x - 1$ est continue sur \mathbb{R} et la fonction logarithme est continue sur $]0, +\infty[$.
- La fonction g est continue sur $]2, +\infty[$ en tant que fonction polynomiale.
- Étudions la continuité de g en 1. Par composition,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty \neq g(1).$$

Donc la fonction g n'est pas continue en 1.

- Étudions la continuité de f en 2. Par composition et continuité du logarithme,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \ln(1) = 0 = g(2) = 0.$$

Donc la fonction g est continue en 2.

4. En utilisant la définition de la valeur absolue, on peut simplifier l'expression de i de la manière suivante :

$$i: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq -2 \\ -1 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

Donc, on peut montrer que la fonction i est continue sur $] -\infty, -2[$ sur $] -2, +\infty[$ mais n'est pas continue en -2 .

Exercice 2 – Prolongement par continuité. [S'inspirer des Exemples 1.16, 1.17 et 1.18, Chap 17]

On considère la fonction

$$f(x) = \sqrt{x} \ln(x)$$

a) Déterminer le domaine de définition \mathcal{D}_f de la fonction f .

La fonction racine carrée étant définie sur $[0, +\infty[$ et la fonction logarithme sur $]0, +\infty[$, par produit, la fonction f est définie sur $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$.

b) Justifier que f est continue sur \mathcal{D}_f .

La fonction racine carrée étant continue sur $[0, +\infty[$ et la fonction logarithme sur $]0, +\infty[$, par produit, la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.

c) Déterminer la limite de f en 0.

Par croissances comparées, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

d) Peut-on prolonger la fonction f par continuité en 0 ?

Comme la fonction f admet une limite finie en 0, elle est prolongeable par continuité. Son prolongement par continuité est donné par

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x}\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Utilisation des théorèmes généraux

Exercice 4 – Théorème des valeurs intermédiaires. [S’inspirer de l’Exemple 2.5, Chapitre 17]

On considère la fonction

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{3x} + x$$

Montrer que l’élément $1 + e^2$ admet un antécédent par la fonction f et que cet antécédent est compris entre 0 et 1.

On cherche à montrer que l’élément $1 + e^2$ admet un antécédent par la fonction f qui est compris entre 0 et 1, c’est-à-dire, on cherche à montrer que

$$\exists x \in [0, 1], f(x) = 1 + e^2.$$

Geste invisible : On veut prendre $a = 0$, $b = 1$ et $k = 1 + e^2$ dans le TVI (v2). Tout d’abord, en tant que somme de fonctions continues sur \mathbb{R} , la fonction f est continue sur \mathbb{R} et en particulier,

① la fonction f est **continue** sur $[0, 1]$.

Par ailleurs, $f(0) = 1$ et $f(1) = 1 + e^3$. Donc, comme $1 + e^2 \in [f(0), f(1)]$, en appliquant le **théorème des valeurs intermédiaires**, il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = 1 + e^2$. Autrement dit, l’élément $1 + e^2$ admet un antécédent par la fonction f qui est compris entre 0 et 1.

Exercice 5 – Théorème des valeurs intermédiaires. [S’inspirer de l’Exemple 2.7, Chapitre 17]

On considère la fonction

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x} - x^2$$

Montrer que la fonction f s’annule au moins une fois sur \mathbb{R} .

Geste invisible : On veut prendre $a = -\infty$ et $b = \infty$ dans le TVI (v4). On a :

① la fonction f est **continue** sur \mathbb{R} , comme somme de fonctions continues sur \mathbb{R} ,

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty < 0$

Donc, en appliquant le **théorème des valeurs intermédiaires**, la fonction f s’annule au moins une fois sur \mathbb{R} .

On peut aussi appliquer le TVI (v3) avec $a = 0$ et $b = 1$ car $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = e^{-1} - 1 < 0$.

Exercice 6 – Théorème de la bijection. [S’inspirer de l’Exemple 2.21, Chapitre 17]

On considère la fonction

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x} + x$$

1. Dresser le tableau de variation de f .

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - e^{-x}.$$

On a

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

De même,

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

On en déduit le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
f	$+\infty$	1	$+\infty$

2. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $] -\infty, 0]$ dans un intervalle à déterminer. On note φ la bijection réciproque associée.

① La fonction f est définie sur l’**intervalle** $] -\infty, 0]$.

② La fonction f est **continue** sur $] -\infty, 0]$.

③ D’après la question précédente, la fonction f est **strictement décroissante** sur $] -\infty, 0]$.

Donc, d’après le **théorème de la bijection**, la fonction f réalise une bijection de $] -\infty, 0]$ sur $[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[= [1, +\infty[$. Notons φ sa bijection réciproque.

3. Dresser le tableau de variation de φ .

• La fonction f est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$. Donc la fonction φ est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

• De plus, $f(0) = 1$ donc $\varphi(1) = 0$.

• Enfin, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$.

On peut alors tracer le tableau de variations de φ .

x	1	$+\infty$
φ	0	$-\infty$

Exercice 7 – Théorème de la bijection. [S'inspirer de l'Exemple 2.22, Chapitre 17]

1. Montrer que l'équation $\ln(x) = \frac{1}{e^x}$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

On cherche à montrer

$$\exists x \in]0, +\infty[, \quad \ln(x) - e^{-x} = 0.$$

Pour cela, on considère la fonction

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) - e^{-x}$$

- ① La fonction f est définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- ② La fonction f est **continue** sur $]0, +\infty[$.
- ③ Montrons que la fonction f est **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$.
(P) En utilisant la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x} + e^{-x} = \frac{1 + xe^{-x}}{x} > 0$$

(E) L'équation $f'(x) = 0$ n'admet aucune solution.

Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. Autrement dit,

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists ! x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = y.$$

En particulier, il existe un unique $\alpha \in]0, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $\ln(\alpha) = \frac{1}{e^\alpha}$.

2. Montrer que $1 < \alpha < e$.

On a

$$f(\alpha) = 0,$$

et

$$f(1) = -e^{-1} < 0,$$

et,

$$f(e) = 1 - e^{-e} > 0 \quad \text{car} \quad -e < 0 \text{ donc } e^{-e} < 1.$$

Finalement, on a

$$f(1) < f(\alpha) < f(e).$$

Or f^{-1} est strictement croissante (car f l'est) donc

$$f^{-1}(f(1)) < f^{-1}(f(\alpha)) < f^{-1}(f(e)),$$

c'est-à-dire

$$1 < \alpha < e.$$

Exercice 8 – Théorème de la bijection. [S'inspirer de l'Exemple 2.23, Chapitre 17]

On considère la fonction

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \ln(x)$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f (limites comprises).

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

On a

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-1}$$

De même, par croissance de la fonction exponentielle,

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) \geq -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq e^{-1}.$$

On en déduit le tableau de variation de f .

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	0	$-e^{-1}$	$+\infty$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.

- ① La fonction f est définie sur l'intervalle $[\frac{1}{e}, +\infty[$.
- ② La fonction f est **continue** sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$.
- ③ D'après la question précédente, la fonction f est **strictement croissante** sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$.

Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction f réalise une bijection de $[\frac{1}{e}, +\infty[$ sur $[f(\frac{1}{e}), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [-\frac{1}{e}, +\infty[$. Autrement dit,

$$\forall y \in [-\frac{1}{e}, +\infty[, \exists ! x \in [\frac{1}{e}, +\infty[, f(x) = y.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in [\frac{1}{e}, +\infty[$ tel que $f(u_n) = n$.

De plus, pour tout $x \in]0, \frac{1}{e}[$, $f(x) < 0$ donc l'équation $f(x) = n$ n'a pas de solution dans $]0, \frac{1}{e}[$. Finalement, l'équation $f(x) = n$ admet bien une unique solution dans $]0, +\infty[$.

3. Préciser la valeur de u_0 .

On remarque que $f(1) = 0$. Or, par définition u_0 est l'unique solution dans $]0, +\infty[$ de l'équation $f(x) = 0$. Donc par unicité, $u_0 = 1$.

4. Comparer $f(u_n)$ et $f(u_{n+1})$. En déduire le sens de monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(u_{n+1}) = n + 1 \geq f(u_n) = n$$

donc, comme f^{-1} est strictement croissante (car f l'est),

$$f^{-1}(f(u_{n+1})) \geq f^{-1}(f(u_n))$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1} \geq u_n.$$

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

5. Soit $n \geq 1$. Montrer que $u_n \geq \sqrt{n}$. On pourra utiliser le fait que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$f(\sqrt{n}) - f(u_n) = \sqrt{n} \ln(\sqrt{n}) - n = \sqrt{n}(\ln(\sqrt{n}) - \sqrt{n}) \leq 0,$$

car $\sqrt{n} \geq 0$ et en utilisant le fait que pour tout $x > 0$, $\ln(x) - x \leq 0$. Donc

$$f(\sqrt{n}) \leq f(u_n) \quad \text{et donc} \quad \sqrt{n} \leq u_n.$$

6. Quelle est la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{n}$ et que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$, par minoration, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$$