Interrogation du 03/02/2025

NOM Prénom :

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \exp(x) & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

- Sur $]0;+\infty[$

  La fonction f coïncide sur $]0,+\infty[$ avec la fonction $x \mapsto x^2 + x + 1$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) donc sur $]0;+\infty[$.

- Sur $]-\infty, 0[$

  La fonction f coïncide sur $]-\infty, 0[$ avec la fonction $x \mapsto \exp(x)$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction usuelle) donc sur $]-\infty, 0[$

- En 0

  On a :
  - $f(0) = \exp(0) = 1$
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 + x + 1 = 1$
  - $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \exp(x) = 1$

  Comme
  $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$$
  la fonction f est continue en 0.

- Conclusion

  $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

Tournez la page →

2. On considère la fonction f définie par

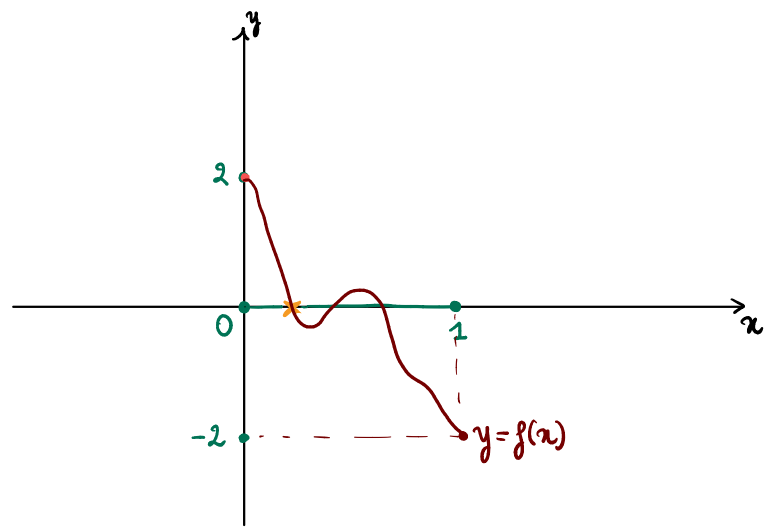
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 \end{array}$$

Montrer que f s'annule au moins une fois sur $[0,1]$. *Bonus : Illustrer la situation à l'aide d'un dessin.*

① La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) donc sur $[0,1]$

② On a :
$f(0) = 2 > 0$ et $f(1) = -2 < 0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f s'annule au moins une fois sur $[0,1]$.



Tournez la page →

3. On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3+5x-1 \end{array}$$

(a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[0, \frac{1}{2}]$ vers un intervalle J à déterminer.

(b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0, \frac{1}{2}]$. *Bonus : Illustrer la situation à l'aide d'un dessin.*

(a)
- La fonction f est définie sur l'intervalle $[0,\frac{1}{2}]$
- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) donc sur $[0,1/2]$
- La fonction f est dérivable sur $[0,1/2]$ et

  $\forall x \in [0,1/2]$, $f'(x) = 3x^2+5$

  - $\forall x \in [0,1/2], f'(x) \geq 0$
  - L'équation $f'(x)=0$ admet 0 solution sur $[0,1/2]$.

  Donc f est strictement croissante sur $[0,1/2]$.

Donc d'après le thm de la bijection,

la fonction f réalise une $\boxed{\text{bijection de } [0,\frac{1}{2}] \text{ vers } [-1,\frac{13}{8}]}$

car $f(0)=-1$

et $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}+\frac{5}{2}-1 = \frac{13}{8}$

(b) D'après la question précédente,

$\forall y \in [-1,\frac{13}{8}], \exists !\, x \in [0,\frac{1}{2}], \ y=f(x)$

En particulier, en prenant $y=0 \in [-1,\frac{13}{8}]$,

$$\boxed{\exists !\, x \in [0,\frac{1}{2}], \quad 0=f(x)}$$