TD dérivation

Exercice 1 :

Ensemble de déf.	Fonction	Ensemble de dérivabilité	Dérivée
$\mathbb{R}$	$f(x)=13x^2+3x-49$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=26x+3$
$\mathbb{R}^*$	$g(x)=\frac{1}{3x}$	$\mathbb{R}^*$	$g'(x)=-\frac{1}{3x^2}$
$\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$	$h(x)=\frac{3}{4x+2}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$	$h'(x)=-\frac{3}{(2x+1)^2}$
$[-1,+\infty[$	$i(x)=\sqrt{x+1}$	$]-1,+\infty[$	$\boldsymbol{i'(x)}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$
$\mathbb{R}$	$f(x)=(-x+6)(3x-2)$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=20-6x$
$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{7}\right\}$	$f(x)=\frac{4x+8}{21x-3}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{7}\right\}$	$f'(x)=-\frac{20}{(7x-1)^2}$
$\mathbb{R}$	$f(x)=\exp\left(x^2\right)$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x\exp\left(x^2\right)$
$\mathbb{R}^*$	$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{2}{x^3}$
$\mathbb{R}$	$g(x)=\frac{1+x}{1+\mathrm{e}^x}-x$	$\mathbb{R}$	$g'(x)=\frac{1-x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}-1$
$\left]-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right[\cup\left]\sqrt{\frac{3}{2}},+\infty\right[$	$h(x)=\ln\left(2x-\frac{3}{x}\right)$	$\left]-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right[\cup\left]\sqrt{\frac{3}{2}},+\infty\right[$	$h'(x)=\frac{2x^2+3}{2x^3-3x}$
$\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	$i(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2-1}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	$\boldsymbol{i'(x)}=\frac{2\mathrm{e}^{2x}\left(x^2-x-1\right)}{(x^2-1)^2}$
$]-1,+\infty[$	$f(x)=1+\ln(1+x)$	$]-1,+\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{1+x}$

Exercice 2 :

1. Graphiquement, $f'(-2)$ correspond au coefficient directement de la tangente au point A . Comme la tangente au point A est horizontale, son coefficient directeur est de 0 donc $f'(-2)=0$. De même, on trouve que $f'(2)=-2$ («quand on avance de un, on descend de deux»).

2. L'équation de la tangente au point d'abscisse -4 est donnée par

$$y=f'(-4)(x+4)+f(-4)$$

Or, en utilisant l'expression explicite de la fonction f, on obtient $f(-4)=1$. De plus, la fonction f est dérivable sur $[-5,5]$ et sa dérivée est donnée par

$$\text{pour tout } x\in[-5,5],\quad f'(x)=-\frac{1}{4}\times 2(x+2)=-\frac{1}{2}(x+2)$$

En particulier, on obtient que, $f'(-4)=1$. Donc, l'équation de la tangente au point d'abscisse 4 est donnée par

$$y=1\times(x+4)+1=x+5$$

Exercice 3 :

1. Tout d'abord, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par,

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=\frac{5\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Soit $a\in\mathbb{R}$. Les tangentes aux points d'abscisses respectives a et $-a$ sont les droites d'équations respectives,

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)\quad\text{et}\quad y=f'(-a)(x+a)+f(-a)$$

Donc ces deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont les mêmes coefficients directeurs, et donc si et seulement si $f'(a)=f'(-a)$. Or

$$f'(-a)=\frac{5\left(1-(-a)^2\right)}{\left(1+(-a)^2\right)^2}=\frac{5\left(1-a^2\right)}{\left(1+a^2\right)^2}=f'(a)$$

Donc les tangentes aux points d'abscisses respectives a et $-a$ sont parallèles.

2. La courbe C_f admet des tangentes horizontales si et seulement si la dérivée s'annule. Or,

$$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} \quad \Leftrightarrow \quad 5\left(1-x^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad x=1 \text{ ou } x=-1$$

Donc la courbe C_f admet des tangentes horizontales aux points d'abscisse 1 et -1 .

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $\forall x \in]0;+\infty[, \quad f(x)=\frac{e^2}{\sqrt{x}}$.

La fonction f est bien dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur cet intervalle, et :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad f'(x)=\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\sqrt{x}-e^{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}=\frac{1}{x}\times\frac{e^{\frac{x}{2}}\cdot(\sqrt{x})^2-e^{\frac{x}{2}}}{2\sqrt{x}}=\frac{x-1}{2x}\times\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}=\frac{(x-1)}{2x}f(x).$$

Exercice 5 :

$\varphi(x)=\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, x>0$

φ est de classe C^3 comme somme et produit de fonctions de classe C^3, et, pour $x>0$:

$$\begin{aligned}
\varphi'(x)&=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^x+\left(\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\\
\varphi''(x)&=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\\
\varphi'''(x)&=\mathrm{e}^x-\left(-\frac{3}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^3}\left(-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)\right)=\mathrm{e}^x+\left(\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^x+\frac{3x+1}{x^5}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

Exercice 6 :

1. Posons

$$S=1+x+x^2+\cdots+x^n.$$

Alors

$$xS=x+x^2+\cdots+x^n+x^{n+1}.$$

En faisant la différence, on obtient

$$S-xS=1-x^{n+1}.$$

Donc

$$S(1-x)=1-x^{n+1},$$

et comme $x\neq 1$, on a bien

$$S=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

2.

Posons

$$T=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}.$$

On remarque que T est obtenu en dérivant la somme précédente par rapport à x :

$$S(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Alors
$$S'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = T.$$
Il suffit donc de dériver :
$$S(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$
On applique la règle du quotient :
$$S'(x) = \frac{(-(n+1)x^n)(1-x) - (1 - x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2}.$$
En simplifiant :
$$S'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1 - x^{n+1})}{(1-x)^2}.$$
Développons le numérateur :
$$-(n+1)x^n(1-x) + (1 - x^{n+1}) = -(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}.$$
$$= 1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}.$$
Ainsi,
$$T = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Exercice 7 : 1. On a $\forall t \in \mathbf{R}_+, y'(t) = x'(t)e^{-at} - a\left(x(t) + \frac{b}{a}\right)e^{-at}$.
Mais $x'(t) = ax(t) + b$, de sorte que
$$\forall t \in \mathbf{R}_+, y'(t) = ax(t)e^{-at} + be^{-at} - ax(t)e^{-at} - be^{-at} = 0.$$
2. De la question précédente, on déduit que y est une fonction constante :
$\forall t \geqslant 0, y(t) = y(0) = x(0) + \frac{b}{a}$.
Et donc
$$\forall t \geqslant 0, \left(x(t) + \frac{b}{a}\right)e^{-at} = x(0) + \frac{b}{a} \Leftrightarrow \forall t \geqslant 0, x(t) = -\frac{b}{a} + \left(x(0) + \frac{b}{a}\right)e^{at}.$$

Exercice 8 :
Pour $x > 0$, on écrit
$$f(x) = x^x = e^{x \ln x}.$$
Ainsi,
$$f'(x) = e^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$
Donc, pour tout $x > 0$,
$$\boxed{f'(x) = x^x\big(\ln x + 1\big)}.$$

Exercice 9 :

Calcul de la différence Pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= (n+1)e^{-x}\big(1-e^{-x}\big)^n - ne^{-x}\big(1-e^{-x}\big)^{n-1} \\ &= e^{-x}\big(1-e^{-x}\big)^{n-1}\Big[(n+1)\big(1-e^{-x}\big) - n\Big] \\ &= e^{-x}\big(1-e^{-x}\big)^{n-1}\big(1-(n+1)e^{-x}\big). \end{aligned}$$

Calcul de la dérivée f'_{n+1} Pour $x > 0$ (on pourra ensuite évaluer en $x = 0$), posons

$$u(x) = e^{-x}, \qquad v(x) = \big(1-e^{-x}\big)^n,$$

ainsi $f_{n+1}(x) = (n+1)u(x)v(x)$. On a $u'(x) = -e^{-x} = -u(x)$ et, puisque $\big(1-e^{-x}\big)' = e^{-x} = u(x)$,

$$v'(x) = n\big(1-e^{-x}\big)^{n-1} \cdot u(x).$$

Donc, par la règle du produit,

$$\begin{aligned} f'_{n+1}(x) &= (n+1)\big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big) \\ &= (n+1)\Big(-e^{-x}\big(1-e^{-x}\big)^n + e^{-x}\cdot ne^{-x}\big(1-e^{-x}\big)^{n-1}\Big) \\ &= (n+1)e^{-x}\big(1-e^{-x}\big)^{n-1}\big(-1+(n+1)e^{-x}\big). \end{aligned}$$

Conclusion En multipliant par $-\dfrac{1}{n+1}$ on obtient, pour $x \geq 0$,

$$-\frac{1}{n+1}f'_{n+1}(x) = e^{-x}\big(1-e^{-x}\big)^{n-1}\big(1-(n+1)e^{-x}\big),$$

qui est exactement l'expression trouvée pour $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Ainsi

$$\boxed{f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{n+1}\, f'_{n+1}(x) \quad \text{pour tout } x \geq 0.}$$

Exercice 10 :

$Q = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$ donc $Q' = (X-\beta)(X-\gamma) + (X-\alpha)(X-\gamma) + (X-\alpha)(X-\beta)$.

$$Q'' = (X-\gamma) + (X-\beta) + (X-\gamma) + (X-\alpha) + (X-\beta) + (X-\alpha) = 2(3X - (\alpha+\beta+\gamma)).$$

Soit (α, β, γ) un élément de U.

Notons que : $Q''(\alpha) - 4\alpha Q'(\alpha) = 2(3\alpha - (\alpha+\beta+\gamma)) - 4\alpha((\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)+0+0) = 2((2\alpha-\beta-\gamma) - 2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma))$

Alors $Q''(\alpha) - 4\alpha Q'(\alpha) = 0 \iff 2((2\alpha-\beta-\gamma) - 2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)) = 0 \iff 2\alpha-\beta-\gamma = 2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$.

Finalement : $Q''(\alpha) - 4\alpha Q'(\alpha) = 0 \iff 2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) = 2\alpha-\beta-\gamma$.

De même $Q''(\beta) - 4\beta Q'(\beta) = 0 \iff 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) = 2\beta-\alpha-\gamma$.

On a encore $Q''(\gamma) - 4\gamma Q'(\gamma) = 0 \iff 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = 2\gamma-\alpha-\beta$.

(α, β, γ) est un élément de U et $Q = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$. (α, β, γ) est solution de ($\mathcal{S}$) si et seulement si $Q'' - 4XQ'$ admet pour racines α, β, γ.