DS 4

Vendredi 7 février 2025, de 13h à 15h30.

- *Les candidat·e·s sont invité·e·s à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible leurs résultats.*
- *Aucun document n'est autorisé.* ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***
- *Pour augmenter la* ***lisibilité*** *des calculs, dans la mesure du possible, les égalités successives seront présentées en colonne (et non pas en ligne) avec les différents symboles = bien alignés.*

Exercice 1 – Questions de cours. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Simplifier les quantités suivantes au maximum.

$$\text{a. } \frac{(n+1)!}{n!} \qquad \text{b. } \frac{(2n)!}{(2n+1)!} \qquad \text{c. } \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{1}}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer les quantités suivantes.

$$\text{a. } (x+2)^4 \qquad \text{b. } (x^2+1)^5$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

$$\text{a. } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} \qquad \text{b. } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \qquad \text{c. } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

4. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ \exp(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

   Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

5. On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - 3x - 3 \end{array}$$

   Montrer que f s'annule au moins une fois sur $[0, 3]$.

6. On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x - 1 \end{array}$$

   (a) Dresser le tableau de variations de f.
   (b) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer.
   (c) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0, +\infty[$.

7. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \frac{\exp(-u_n)}{u_n}$$

   (a) Écrire une fonction, appelée `suite`, qui prend en argument un entier naturel `n` et qui renvoie la valeur de u_n.
   (b) Écrire une fonction, appelée `listesuite`, qui prend en argument un entier naturel `n` et qui renvoie la liste de tous les termes de u_0 à u_n.
   (c) Écrire un programme Python qui renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 10^6$.

Exercice 2 – On considère deux urnes :

1. une urne rouge, U_R, composée initialement de deux balles rouges et deux balles bleues,
2. une urne bleue, U_B, composée initialement d'une balle rouge et trois balles bleues.

On effectue trois tirages successifs et **sans remise** selon le protocole suivant.

- Le premier tirage s'effectue toujours dans l'urne rouge.
- Lorsqu'un tirage est effectué dans une urne, la balle obtenue est retirée de cette urne, et le tirage d'après s'effectue dans l'urne de la couleur de la balle obtenue au tirage précédent.

On suppose qu'il y a équiprobabilité du choix des différentes balles. On note pour tout $k \in \{1,2,3\}$, R_k l'évènement «Obtenir une balle rouge au k-ième tirage» et B_k l'évènement «Obtenir une balle bleue au k-ième tirage».

1. Représenter cette situation sur un arbre de probabilité. *Dans cette question, on ne demande pas de justifier les différentes valeurs de probabilités indiquées sur l'arbre.*
2. Justifier que $\mathbb{P}_{R_1}(R_2) = \frac{1}{3}$.
3. Déterminer de même $\mathbb{P}_{B_1}(R_2)$.
4. Déterminer $\mathbb{P}(R_2)$.
5. Déterminer $\mathbb{P}_{R_2}(R_1)$.
6. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une balle rouge lors des deux premiers tirages ?
7. Quelle est la probabilité d'obtenir trois balles rouges au cours des trois tirages ?
8. Dans cette question, on note, pour tout $k \in \{0,1,2\}$, X_k l'évènement «Obtenir k balles rouges lors des trois tirages».
   (a) Déterminer $\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_3)$. En déduire $\mathbb{P}(X_0)$.
   (b) Déterminer $\mathbb{P}(X_1)$.
   (c) Vérifier que
$$\mathbb{P}(X_2) = \frac{1}{3}.$$
   (d) Calculer la somme suivante :
$$\sum_{k=0}^{2} k \times \mathbb{P}(X_k).$$

Exercice 3 – On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie A. Dans cette première partie, on cherche à déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression matricielle de M^n, la puissance n-ième de la matrice M.

1. Calculer M^2. En déduire qu'il existe deux coefficients réels α et β tels que

$$M^2 = \alpha M + \beta I_4.$$

2. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} a_{n+1} = 3b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n. \end{cases}$$

   Montrer par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

3. (a) Que valent b_0 et b_1 ?
   (b) Démontrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_{n+2} = 2b_{n+1} + 3b_n.$$

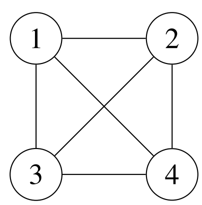
   (c) En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \frac{3^n - (-1)^n}{4}$$

4. En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \frac{3^n + 3(-1)^n}{4}$$

PARTIE B. On considère le graphe non orienté suivant.



5. Donner la matrice d'adjacence du graphe.
6. Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant le sommet 1 au sommet 3.
7. Compléter et recopier le programme Python suivant pour qu'il calcule et renvoie le nombre de chaînes de longueur 5 reliant les sommets 2 et 3.

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as al

M = np.array([[0,1,1,1],[1,0,1,1],[1,1,0,1],[1,1,1,0]])
puissanceM = al.matrix_power(..... , .....)
nombrechaines = puissanceM[..... , .....]
print(nombrechaines)
```

8. Le graphe est-il connexe ?