17 Variables Aléatoires Finies

On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé : Ω est un **univers**, $\mathcal{A}$ est l'ensemble des **évènements** et $\mathbb{P}$ est une **probabilité** sur l'univers Ω.

1 Loi d'une variable aléatoire

1.1 Notion de variable aléatoire

Définition 1.1 Une **variable aléatoire** est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$, qui à chaque issue, associe un nombre réel telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad [X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant \omega\} \in \mathcal{A}$$

c'est-à-dire telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[X \leqslant x]$ est un évènement. On note alors $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ l'ensemble des valeurs prises. On dit que cette variable aléatoire est **finie** lorsque l'ensemble des valeurs prises $X(\Omega)$ est fini et **discrète** lorsque l'ensemble des valeurs prises $X(\Omega)$ est infini (dénombrable).

Définition 1.2 Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. On définit les évènements suivants :
- Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $[X = k] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $[X \leqslant k] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant k\}$.
- Pour tout $A \subset \Omega$, $[X \in A] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$.

Exemple 1.3 On lance trois fois une pièce équilibrée et on note X le rang d'apparition du premier Pile. On convient que X prend la valeur 0 si aucun Pile n'apparaît. On note, pour tout $n \in [\![1,3]\!]$, P_n l'évènement "Obtenir Pile au n-ième lancer".

Univers (ensemble des issues possibles de l'expérience)	Ω	$=$	...
Ensemble des valeurs prises par la v.a. X	$X(\Omega)$	$=$	$[\![0,3]\!]$

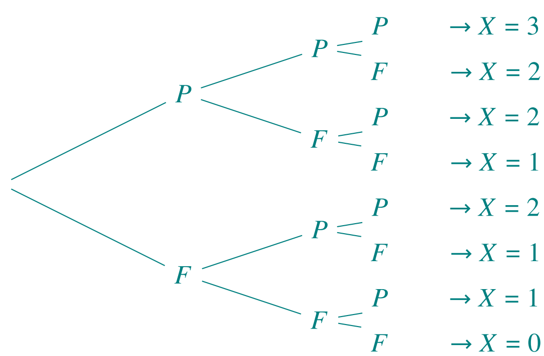
Alors,

$$[X = 0] = \overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 \cap \overline{P}_3$$

$$[X = 1] = P_1$$

$$[X = 2] = \overline{P}_1 \cap P_2$$

$$[X = 3] = \overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 \cap P_3$$



Exemple 1.4 On lance deux dés équilibrés à six faces. On note S la variable aléatoire qui, à tout lancer, associe la somme des deux résultats. On note, pour tout $k \in \{1,2\}$ et $n \in [\![1,6]\!]$, A_n^k l'évènement "Obtenir le chiffre n au k-ième lancer.

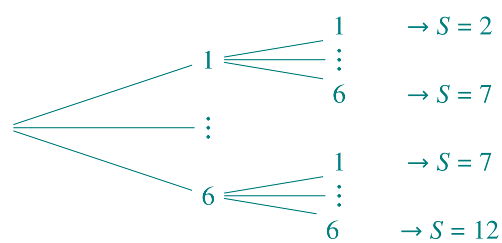
Univers (ensemble des issues possibles de l'expérience)	Ω	$=$	$[\![1,6]\!]^2$
Ensemble des valeurs prises par la v.a. S	$S(\Omega)$	$=$	$[\![2,12]\!]$

Alors,

$$[S = 2] = A_1^1 \cap A_1^2$$

$$[S = 3] = (A_1^1 \cap A_2^2) \cup (A_2^1 \cap A_1^2)$$

...



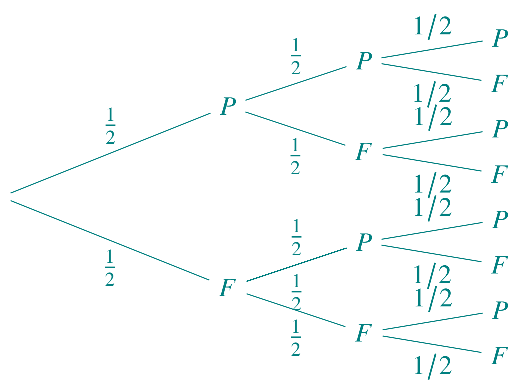
1.2 Loi d'une variable aléatoire

Définition 1.5 La **loi de X** est la donnée de l'ensemble $X(\Omega)$ et de toutes les probabilités $\mathbb{P}([X=k])$ pour tout $k \in X(\Omega)$.

Ne pas confondre l'égalité (ponctuelle) des variables aléatoires et leur égalité en loi. Par exemple, si on lance deux dés et qu'on note X_1 (respectivement X_2) le résultat du premier (resp. du second) lancer), alors il est clair que X_1 et X_2 suivent la même loi (loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$). En revanche, les variables X_1 et X_2 ne sont pas égales : le résultat du premier dé n'est pas toujours le même que celui du second dé (l'un des deux dés peut par exemple donner un 1 alors que l'autre donne un 6).

Exemple 1.6 On lance trois fois une pièce équilibrée et on note X le rang d'apparition du premier Pile. On convient que X prend la valeur 0 si aucun Pile n'apparaît. Donner la loi de X.

Représentons cette situation sur un arbre de probabilité.



Cet arbre (et l'application de certains formules de probabilité !) permet de déduire la loi de X de la manière suivante.

Valeurs de X	0	1	2	3
Probabilité	$\mathbb{P}([X=0])=\frac{1}{8}$	$\mathbb{P}([X=1])=\frac{1}{2}$	$\mathbb{P}([X=2])=\frac{1}{4}$	$\mathbb{P}([X=3])=\frac{1}{8}$

On remarque que

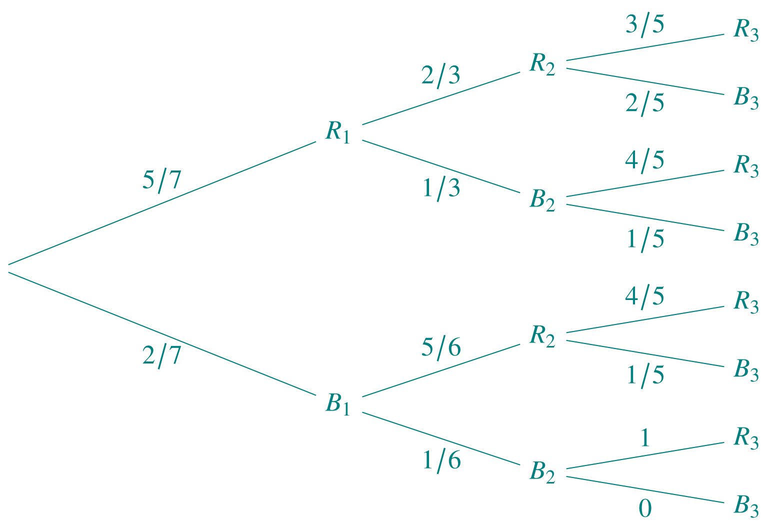
$$\sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}([X=k]) = 1$$

Connaissant la loi de X, on peut alors calculer les probabilités suivantes.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=4]) &= 0 \\
\mathbb{P}([X\in\{0,1\}]) &= P([X=0]\cup[X=1]) = P([X=0])+P([X=1]) = \tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{2}=\tfrac{5}{8} \\
\mathbb{P}([X\geqslant 2]) &= P([X=2]\cup[X=3]) = P([X=2])+P([X=3]) = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{3}{4} \\
\mathbb{P}([X>2]) &= \mathbb{P}([X=3]) = \tfrac{1}{8} \\
\mathbb{P}([X<0]) &= 0 \\
\mathbb{P}([0<X\leqslant 3]) &= P([X=1]\cup[X=2])\cup[X=3]) = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}=\tfrac{7}{8}
\end{aligned}$$

Exemple 1.7 Dans une urne contenant 2 boules boules blanches et 5 boules rouges, on tire trois boules, une par une, **sans remise**. On note, pour tout $k \in \{1,2,3\}$, B_k l'évènement "On tire une boule blanche au k-ième tirage" et R_k l'évènement "On tire une boule rouge au k-ième tirage". Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées à la fin de l'expérience. Donner la loi de X.

On peut représenter la situation sur l'arbre de probabilité suivant.



Cet arbre (et l'application de certains formules de probabilité !) permet de déduire la loi de X de la manière suivante.

Valeurs de X	0	1	2
Probabilité	$\mathbb{P}([X=0]) = \frac{2}{7}$	$\mathbb{P}([X=1]) = \frac{4}{7}$	$\mathbb{P}([X=2]) = \frac{1}{7}$

On remarque que

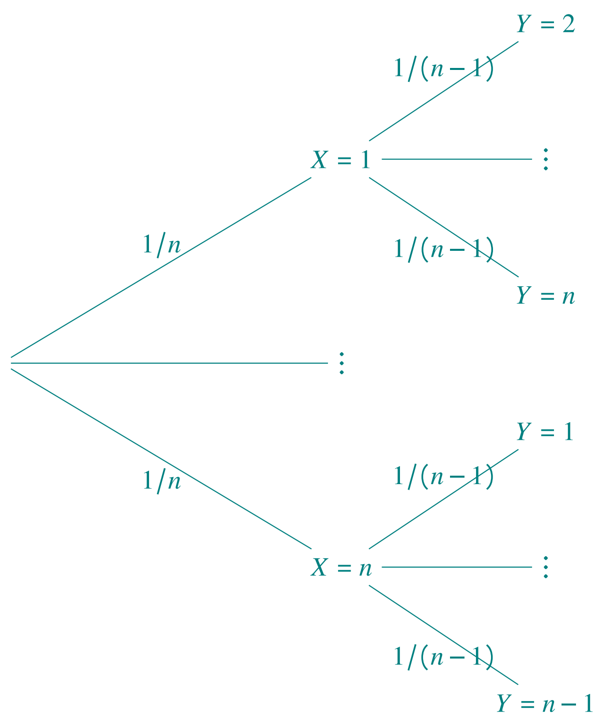
$$\sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}([X=k]) = 1$$

Connaissant la loi de X, on peut alors calculer les probabilités suivantes.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=3]) &= 0 \\
\mathbb{P}([X \in \{0,1\}]) &= P([X=0] \cup [X=1]) = P([X=0]) + P([X=1]) = \tfrac{2}{7} + \tfrac{4}{7} = \tfrac{6}{7} \\
\mathbb{P}([X \geqslant 2]) &= P([X=2]) = \tfrac{1}{7} \\
\mathbb{P}([X > 2]) &= 0 \\
\mathbb{P}([X \geqslant 1]) &= P([X=1] \cup [X=2]) = P([X=1]) + P([X=2]) = \tfrac{4}{7} + \tfrac{1}{7} = \tfrac{5}{7}
\end{aligned}$$

Exemple 1.8 Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue deux tirages successifs d'une boule sans remise. On note Z la variable aléatoire égale au plus petit des deux numéros. Déterminer la loi de Z.

On peut représenter la situation sur un arbre de probabilité (complété de manière partielle). Notons X la variable aléatoire donnant le numéro de la première boule et Y la variable aléatoire donnant le numéro de la deuxième boule.



On remarque déjà que

$$Z(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$$

Puis, regardons au cas par cas.

$$\begin{aligned}
P(Z=1) &= P(X=1 \cup (X=2 \cap Y=1) \cup (X=3 \cap Y=1) \cup \cdots \cup (X=n \cap Y=1)) \\
&= P(X_1) + P(X=2 \cap Y=1) + P(X=3 \cap Y=1) + \cdots + P(X=n \cap Y=1) \\
&\text{par incompatibilité des évènements} \\
&= P(X_1) + P(X=2) \times P_{X=2}(Y=1) + P(X=3) \times P_{X=3}(Y=1) + \cdots + P(X=n) \times P_{X=n}(Y=1) \\
&\text{par formule des proba proba composées (attention pas d'indépendance !)} \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \\
&= \frac{n-1+1+1+\cdots+1}{n(n-1)} \\
&= \frac{2(n-1)}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

Proposition 1.9 Soit X une variable aléatoire discrète. La famille $([X=k])_{k\in X(\Omega)}$ forme un système complet d'évènements et donc
$$\sum_{k\in X(\Omega)} P[X=k]=1$$

Cette proposition peut servir soit à *vérifier nos calculs*, soit à *trouver une probabilité manquante ou un paramètre manquant*.

Exemple 1.10 Soit $a\in\mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1,10]\!]$ dont la loi est donnée par
$$\forall k\in[\![1,10]\!],\qquad \mathbb{P}([X=k])=ak^2$$

Déterminer la valeur du paramètre a.

On doit avoir
$$\sum_{k=1}^{10}\mathbb{P}([X=k])=1.$$
Or,
$$\sum_{k=1}^{10}\mathbb{P}([X=k])=a\sum_{k=1}^{10}k^2=a\times\frac{10\times11\times21}{6}=385a.$$
Donc, on doit choisir
$$a=\frac{1}{385}$$

1.3 Transformation d'une variable aléatoire

Proposition 1.11 Soient X une variable aléatoire réelle sur Ω et g une fonction définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $Y=g(X)$ est une variable aléatoire réelle sur Ω dont la loi est donnée par
- $Y(\Omega)=\{g(x),x\in X(\Omega)\}$
- Pour tout $y\in Y(\Omega)$,
$$\mathbb{P}([Y=y])=\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ g(x)=y}}\mathbb{P}([X=x])$$

Exemple 1.12 Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1,1,4,5\}$ dont la loi est donnée par

Valeurs de U	-1	1	4	5
Probabilité	$\mathbb{P}([U=-1])=\frac{1}{4}$	$\mathbb{P}([U=1])=\frac{1}{3}$	$\mathbb{P}([U=4])=\frac{1}{6}$	$\mathbb{P}([U=5])=\frac{1}{4}$

Donner la loi de $V=U^2$.

- **Étape 1 : Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.** Tout d'abord,

x	-1	1	4	5
x^2	1	1	16	25

Donc,
$$V(\Omega)=\{1,16,25\}$$

- **Étape 2 : Déterminer la loi de la variable aléatoire.** Donc la loi de V est donnée par

Valeurs de V	1	16	25
Probabilité	$\mathbb{P}([V=1])=\frac{7}{12}$	$\mathbb{P}([V=16])=\frac{1}{6}$	$\mathbb{P}([V=25])=\frac{1}{4}$

Détaillons un des calculs.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([V=1]) &= \mathbb{P}\left(\left[U^2=1\right]\right) \\
&= \mathbb{P}([U=1]\cup[U=-1]) \\
&= \mathbb{P}([U=1])+\mathbb{P}([U=-1]) && \text{par incompatibilité} \\
&= \frac{1}{4}+\frac{1}{3} \\
&= \frac{7}{12}
\end{aligned}$$

Exemple 1.13 Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par

Valeurs de X	0	1	2
Probabilité	$\mathbb{P}([X=0])=\frac{2}{7}$	$\mathbb{P}([X=1])=\frac{4}{7}$	$\mathbb{P}([X=2])=\frac{1}{7}$

Déterminer la loi de $Y=|X-1|$.

La loi de Y est donnée par

Valeurs de Y	0	1
Probabilité	$\mathbb{P}([Y=0])=\frac{4}{7}$	$\mathbb{P}([V=1])=\frac{3}{7}$

2 Moments d'une variable aléatoire

2.1 Espérance

Définition 2.1 Soit X une variable aléatoire finie sur Ω. On appelle **espérance** de X le réel suivant, noté $\mathbb{E}(X)$,

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k\in X(\Omega)} k\cdot\mathbb{P}([X=k])$$

L'espérance représente la *moyenne* de toutes les valeurs prises par la variable aléatoire.

Proposition 2.2 Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω admettant une espérance.

1. Si $X(\Omega)\subset[a,b]$ alors $a\leqslant\mathbb{E}(X)\leqslant b$.
2. Si X est une variable aléatoire à valeurs positives, c-à-d $X(\Omega)\subset\mathbb{R}_+$, alors $\mathbb{E}(X)\geqslant 0$.
3. La variable aléatoire X est dite centrée lorsque $\mathbb{E}(X)=0$.
4. Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $Y=aX+b$ admet une espérance et $\mathbb{E}(aX+b)=a\mathbb{E}(X)+b$.

Exemple 2.3 Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1,1,4,5\}$ dont la loi est donnée par

Valeurs de U	-1	1	4	5
Probabilité	$\mathbb{P}([U=-1])=\frac{1}{4}$	$\mathbb{P}([U=1])=\frac{1}{3}$	$\mathbb{P}([U=4])=\frac{1}{6}$	$\mathbb{P}([U=5])=\frac{1}{4}$

Montrer que U admet une espérance et la calculer.

Comme U est une variable aléatoire **finie**, elle admet une espérance, qui est donnée par

$$\mathbb{E}(U)=(-1)\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{4}=2$$

Exemple 2.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ dont la loi est donnée par

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \qquad \mathbb{P}([X=k]) = \frac{2k}{n+n^2}$$

Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Comme X est une variable aléatoire **finie**, elle admet forcément une espérance, qui est donnée par,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \mathbb{P}([X=k]) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n+1}{3}$$

Exemple 2.5 On lance une fois un dé équilibré à six faces. Soit X la variable aléatoire qui correspond au numéro obtenu. Déterminer l'espérance de X.

Tout d'abord, déterminons la loi de X. Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont

$$X(\Omega) = \{1,2,\dots,6\}$$

et les probabilités associées sont

$$\forall k \in \{1,2,\dots,6\}, \qquad P([X=k]) = \frac{1}{6}.$$

Comme X est une variable aléatoire **finie**, elle admet une espérance, qui est donnée par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} k \cdot \mathbb{P}([X=k]) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k = \frac{7}{2}$$

Proposition 2.6 — Théorème de transfert. Soient X une variable aléatoire finie et g une fonction définie sur $X(\Omega)$. Alors la variable aléatoire $Y = g(X)$ admet une espérance donnée par

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k \in X(\Omega)} g(k) \cdot \mathbb{P}([X=k])$$

Le théorème de transfert permet de calculer l'espérance de $g(X)$ sans déterminer sa loi.

Exemple 2.7 Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1,1,4,5\}$ dont la loi est donnée par

Valeurs de U	-1	1	4	5
Probabilité	$\mathbb{P}([U=-1]) = \frac{1}{4}$	$\mathbb{P}([U=1]) = \frac{1}{3}$	$\mathbb{P}([U=4]) = \frac{1}{6}$	$\mathbb{P}([U=5]) = \frac{1}{4}$

Montrer que $V = U^2$ admet une espérance et la calculer.

- Première méthode : Déterminer la loi de V puis son espérance. La loi de V est donnée par

Valeurs de V	1	16	25
Probabilité	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

Comme V est une variable aléatoire **finie**, elle admet forcément une espérance, qui vaut

$$\mathbb{E}(V) = 1 \times \frac{7}{12} + \frac{16}{6} + \frac{25}{4} = \frac{19}{2}$$

- Deuxième méthode : Déterminer l'espérance de V grâce au théorème de transfert (à partir de la loi de U). Comme U est une variable aléatoire **finie**, par **théorème de transfert**, $V = U^2$ admet une espérance qui vaut

$$\mathbb{E}(V) = (-1)^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{4} = \frac{19}{2}$$

Exemple 2.8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ dont la loi est donnée par

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \qquad \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2k}{n+n^2}$$

Montrer que $Y = X^2$ admet une espérance et la calculer.

Comme X est une variable aléatoire **finie**, par **théorème de transfert**, $Y = X^2$ admet une espérance, qui est donnée par,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n(n+1)}{2}$$

2.2 Variance

Définition 2.9 Soit X une variable aléatoire finie sur Ω. On appelle **variance** de X le réel suivant, noté $V(X)$,

$$V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

La variance et l'écart-type mesurent l'écart entre les valeurs prises par la variable aléatoire et son espérance, ce sont des mesures de *dispersion*.

Proposition 2.10 — Formule de Koenig-Huygens. Soit X une variable aléatoire réelle finie. On a

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Démonstration. Soit X une variable aléatoire finie sur Ω et notons $m = \mathbb{E}(X)$. On a,

$$\begin{aligned}
V(X) &= \mathbb{E}\left[(X-m)^2\right] && \text{par définition de la variance} \\
&= \mathbb{E}\left[X^2 - 2mX + m^2\right] && \text{en développant} \\
&= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[2mX] + \mathbb{E}[m^2] && \text{par linéarité de l'espérance} \\
&= \mathbb{E}[X^2] - 2m\mathbb{E}[X] + m^2\mathbb{E}[1] && \text{par linéarité de l'espérance} \\
&= \mathbb{E}[X^2] - 2m^2 + m^2 && \text{car } \mathbb{E}(X) = m \text{ et } \mathbb{E}(1) = 1 \\
&= \mathbb{E}[X^2] - m^2 \\
&= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.11 Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω admettant une variance.
1. Alors $V(X) \geq 0$.
2. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $Y = aX + b$ admet une variance et $V(aX+b) = a^2 V(X)$.
3. Lorsque $V(X) = 1$, X est dite réduite.

Exemple 2.12 Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1,1,4,5\}$ dont la loi est donnée par

Valeurs de U	-1	1	4	5
Probabilité	$\mathbb{P}([U=-1])=\frac{1}{4}$	$\mathbb{P}([U=1])=\frac{1}{3}$	$\mathbb{P}([U=4])=\frac{1}{6}$	$\mathbb{P}([U=5])=\frac{1}{4}$

Montrer que U admet une variance et la calculer.

Comme U est une variable aléatoire **finie**, elle admet une variance. De plus, on a déjà calculé que (cf Exemples 2.3 et 2.7),

$$\mathbb{E}(U)=2 \qquad \text{et} \qquad E(U^2)=\frac{19}{2}$$

Donc, d'après le **théorème de Koenig-Huygens**, la variance de U est donnée par

$$V(U)=\mathbb{E}(U^2)-\mathbb{E}(U)^2=\frac{19}{2}-4=\frac{11}{2}$$

2.3 Écart-type

Définition 2.13 Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. L'écart-type de X est le réel

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}.$$

Proposition 2.14 Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance non nulle. Alors,

$$X^*=\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

est une variable aléatoire centrée - c-à-d $\mathbb{E}(X^*)=0$ - et réduite - c-à-d $V(X^*)=1$-, appelée **variable aléatoire centrée réduite associée à X.**

Démonstration. Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance non nulle et

$$X^*=\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

- Montrons que X^* est une variable aléatoire centrée. Par **linéarité** de l'espérance, on a,

$$\mathbb{E}(X^*)=\mathbb{E}\left(\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right)=\frac{1}{\sigma(X)}(\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X))=0$$

- Montrons que X^* est une variable aléatoire réduite. On a,

$$V(X)=V\left(\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right)=\frac{1}{\sigma(X)^2}V(X)=1$$

∎

3 Lois usuelles finies

3.1 Variable aléatoire certaine

Définition 3.1 Une variable aléatoire **certaine** est une variable aléatoire finie qui ne prend qu'une seule valeur. Autrement dit, c'est une variable aléatoire à valeurs dans $\{a\}$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$ dont la loi est donnée par,

$$\mathbb{P}([X = a]) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}\backslash\{a\},\ \mathbb{P}([X = k]) = 0$$

Son espérance et sa variance valent alors

$$\mathbb{E}(X) = a \qquad \text{et} \qquad V(X) = 0$$

Démonstration. Soit X une variable aléatoire certaine à valeurs dans $\{a\}$.

- X est une variable aléatoire **finie** donc elle admet une espérance et elle est donnée par,

$$\mathbb{E}(X) = a \times \mathbb{P}([X = a]) = a$$

- X est une variable aléatoire **finie** donc elle admet une variance et elle est donnée par, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - a^2$$

Or, d'après la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(X^2) = a^2 \times \mathbb{P}([X = a]) = a^2$$

Donc, finalement, on obtient que

$$V(X) = 0.$$

■

3.2 Loi uniforme

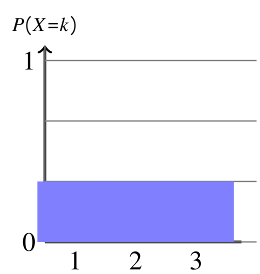
Définition 3.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire X **uniforme sur** $[\![1,n]\!]$ est une variable aléatoire finie à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ dont la loi est donnée par,

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \qquad \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{n}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$. Son espérance et sa variance valent alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

? Cette loi permet de modéliser des situations d'**équiprobabilité**. Par exemple, si on lance un dé équilibré à six faces et que l'on note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu, alors X suit une loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$. Cette situation peut être représentée par le diagramme en barres ci-contre.



Démonstration. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$.

- X est une variable aléatoire **finie** donc elle admet une espérance et elle est donnée par,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

- X est une variable aléatoire **finie** donc elle admet une variance et elle est donnée par, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \frac{(n+1)^2}{4}$$

Or, d'après la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Donc, finalement, on obtient que

$$V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(2n+2)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

■

Définition 3.3 Soient $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, $a < b$. Une variable aléatoire X **uniforme sur** $[\![a,b]\!]$ est une variable aléatoire finie à valeurs dans $[\![a,b]\!]$ dont la loi est donnée par,

$$\forall k \in [\![a,b]\!], \qquad \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{b-a+1}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$. Son espérance et sa variance valent alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

Exemple 3.4 — Ecricome 2017, Maths S. On dispose de n urnes initialement vides, numérotées de 1 à n et on dispose d'un grand stock de boules que l'on dépose une à une dans ces urnes. Pour chaque boule, on choisit au hasard, de façon équiprobable, l'urne dans laquelle la boule est déposée. On note X_n le rang du premier tirage pour lequel une des urnes contiendra deux boules.

1. Dans cette question que $n = 1$. Déterminer la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.

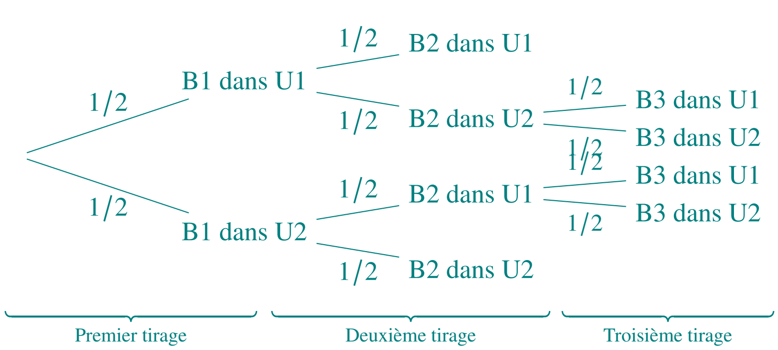
   Lorsque $n = 1$, on dispose d'une seule urne. Chaque boule va donc toujours dans cette unique urne. Ainsi, cette unique urne contiendra deux boules forcément au deuxième tirage. C'est une situation **déterministe** (sans aléa). La variable aléatoire X_1 est une variable aléatoire **certaine** :

   $$P([X_1 = 2]) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}\backslash\{2\},\ P([X_1 = k]) = 0$$

   La variable aléatoire X_2 est **finie**, elle admet donc une espérance et une variance données par
   $$\mathbb{E}(X_1) = 2 \qquad \text{et} \qquad V(X_1) = 0.$$

2. Dans cette question que $n = 2$. Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance et sa variance.

   Lorsque $n = 2$, on dispose de deux urnes. Chaque boule va de façon **équiprobable** dans l'une des deux urnes. Représentons cette situation sur un arbre de probabilité.



   Grâce à cet arbre de probabilité, on voit que

   $$X_2(\Omega) = \{2,3\}$$

De plus, par **formule des probabilités totales** (non détaillée ici)

$$P([X_2 = 2]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

De même,

$$P([X_2 = 3]) = \frac{1}{2}$$

Donc, la variable X_2 suit une **loi uniforme** sur $[\![2,3]\!]$:

$$X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![2,3]\!])$$

3.3 Loi de Bernoulli

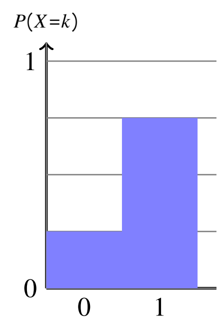
Définition 3.5 Soit $p \in [0,1]$. Une variable aléatoire X **de Bernoulli de paramètre** p est une variable aléatoire finie à valeurs dans $\{0,1\}$ dont la loi est donnée par,

$$\mathbb{P}([X = 1]) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}([X = 0]) = 1 - p$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Son espérance et sa variance valent alors

$$\mathbb{E}(X) = p \qquad \text{et} \qquad V(X) = p(1-p)$$

? Situation typique : On considère une épreuve ayant deux issues : **le succès et l'échec**, avec une probabilité p d'obtenir un succès. On associe à cette expérience la variable aléatoire X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec. Alors X suit une loi $\mathcal{B}(p)$. Par exemple, pour $p = \frac{1}{3}$, cette situation peut être représentée par le diagramme en barres ci-contre.



Démonstration. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

- X est une variable aléatoire **finie** donc elle admet une espérance et elle est donnée par,

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \mathbb{P}([X = 1]) + 0 \cdot \mathbb{P}([X = 0]) = p$$

- X est une variable aléatoire **finie** donc elle admet une variance et elle est donnée par, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - p^2$$

  Or, d'après la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \cdot \mathbb{P}([X = 1]) + 0^2 \cdot \mathbb{P}([X = 0]) = p$$

  Donc, finalement, on obtient que

$$V(X) = p - p^2 = p(1-p)$$

■

Exemple 3.6 — EML 2018, Maths S. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Z_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le k-ième tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents et prenant la valeur 0 sinon.

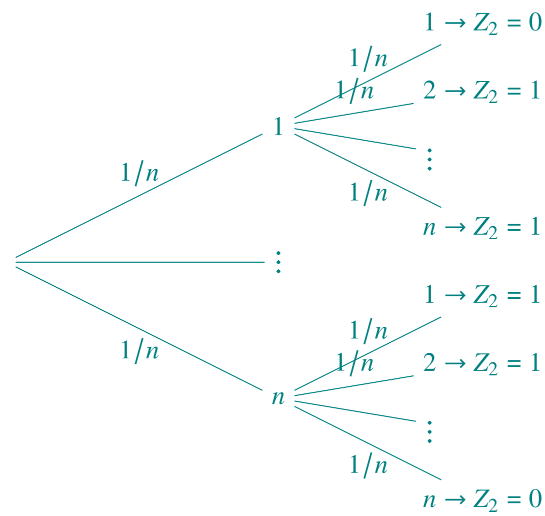
1. Déterminer la loi de Z_1.

   Au premier tirage, on tire forcément un numéro non tiré. C'est une situation **déterministe** (sans aléa). La variable aléatoire Z_1 est une variable **certaine** :

$$\mathbb{P}([Z_1 = 1]) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}\backslash\{1\},\ \mathbb{P}([Z_1 = k]) = 0$$

2. Déterminer la loi de Z_2.

   Pour trouver la loi de Z_2, on s'intéresse au numéro du deuxième tirage (et à savoir s'il est différent du numéro du premier tirage). Représentons cette situation sur un arbre de probabilité.



   On sait déjà que

$$Z_2(\Omega) = \{0, 1\}$$

   Puis, d'après la **formule des probabilités totales**,

$$\mathbb{P}([Z_2 = 0]) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

   Puis, en passant à l'**évènement complémentaire**, on a,

$$\mathbb{P}([Z_2 = 1]) = 1 - \mathbb{P}([Z_2 = 0]) = 1 - \frac{1}{n}$$

   Donc, Z_2 est suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $1 - \frac{1}{n}$:

$$Z_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

3.4 Loi de binomiale

Définition 3.7 Soient $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire X **binomiale de paramètres** n **et** p est une variable aléatoire finie à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ dont la loi est donnée par,

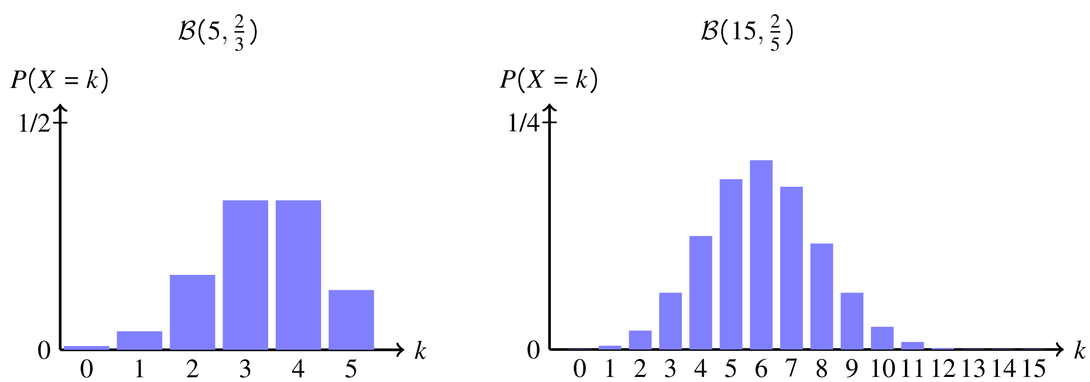
$$\forall k \in [\![0,n]\!], \qquad \mathbb{P}([X=k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Son espérance et sa variance valent alors

$$\mathbb{E}(X) = np \qquad \text{et} \qquad V(X) = np(1-p)$$

?

Situation typique : On considère une épreuve ayant deux issues : le **succès et l'échec**. On **répète** n fois une telle épreuve de manière identique et indépendante. On associe à cette expérience la variable aléatoire X égale au **nombre de succès** obtenus alors de ces n épreuves. Alors X suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$. Ces situations peuvent être représentées par des diagrammes en barres comme ceux ci-dessous.



Preuve de l'espérance. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Comme X est une variable aléatoire **finie** alors elle admet une espérance donnée par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathbb{P}([X=k]) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$k\binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n \times \binom{n-1}{k-1}$$

Donc, finalement, on obtient,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell+1} (1-p)^{n-\ell-1} && \text{en faisant le cht d'indice } \ell = k-1 \\
&= np\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{n-1-\ell} \\
&= np(p+1-p)^{n-1} && \text{grâce au binôme de Newton} \\
&= np
\end{aligned}$$

■

Preuve de la variance. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Comme X^2 est une variable aléatoire **finie** alors elle admet une espérance donnée par, d'après le **théorème de transfert**,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \mathbb{P}([X=k]) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k \neq 1$,

$$\begin{aligned} k^2\binom{n}{k} &= k(k-1)\binom{n}{k} + k\binom{n}{k} \\ &= \frac{k(k-1)n!}{k!(n-k)!} + k\binom{n}{k} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} + k\binom{n}{k} \\ &= n(n-1)\binom{n-2}{k-2} + k\binom{n}{k} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} + n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= \mathbb{E}(X) + \sum_{\ell=0}^{n-2}\binom{n-2}{\ell}p^{\ell+2}(1-p)^{n-\ell-2} && \text{en faisant le cht d'indice } \ell = k-2 \\ &= np + n(n-1)p^2\sum_{\ell=0}^{n-2}\binom{n-2}{\ell}p^{\ell}(1-p)^{n-2-\ell} \\ &= np + n(n-1)p^2(1+1-p)^{n-2} && \text{grâce au binôme de Newton} \\ &= np + n(n-1)p^2 \end{aligned}$$

Comme X est une variable aléatoire finie, X admet une variance et d'après le **théorème de Koenig-Huygens**, elle vaut,

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = np + n(n-1)p^2 - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p)$$

■

Exemple 3.8 On réalise 10 tirages avec remise dans une urne contenant 5 boules rouges et 3 boules bleues. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules bleues obtenues. Donner la loi de X.

- On a au départ une épreuve de Bernoulli : on fait un tirage, on obtient une boule bleue (le succès) avec probabilité $3/8$ et on obtient une boule rouge (échec) avec probabilité $5/8$.
- On répète 10 fois cette expérience, de manière identique et indépendante (car tirage avec remise).
- La variable aléatoire X compte le nombre de succès. Elle suit donc une loi $\mathcal{B}(10, \frac{5}{8})$.

Exemple 3.9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois un dé équilibré à six faces et on note X la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus. Donner la loi de X.

- On a au départ une épreuve de Bernoulli : on lance un dé, on obtient un 6 (le succès) avec probabilité $1/6$ et on n'obtient tout sauf un 6 (échec) avec probabilité $5/6$.
- On répète n fois cette expérience, de manière identique et indépendante.
- La variable aléatoire X compte le nombre de succès. Elle suit donc une loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$.