TD 17 – Variables Aléatoires Finies

Savoir déterminer une loi

Exercice 1 – On lance deux dés équilibrés à six faces. On note S la variable aléatoire donnant la somme des deux dés et X la variable aléatoire donnant la plus grande valeur obtenue parmi les deux dés. Donner les lois de S et de X.

Exercice 2 – Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues. On tire 2 boules successivement sans remise. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

1. Donner $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de X.
3. Déterminer la loi de $Y = (X-1)^2$.

Exercice 3 – Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues. On tire 2 boules successivement avec remise. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

1. Donner $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de X.
3. Déterminer la loi de $Y = (X-1)^2$.

Exercice 4 – Un joueur mise 1 euro sur un entier entre 1 et 6 puis il jette deux dés.

- Si l'entier choisi sort une fois, le joueur gagne deux euros.
- Si l'entier choisi sort deux fois, le joueur gagne trois euros.
- Si l'entier choisi ne sort à aucun des deux lancers, le joueur perd sa mise.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur (en comptant sa mise initiale). Déterminer la loi de X.

Exercice 5 – On considère une urne contenant $n \geqslant 2$ boules numérotées 1 à n. On effectue une succession de $n+1$ tirages avec remise. On note, pour $k \in [\![1, n+1]\!]$, N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k-ième tirage et on note X la variable aléatoire égale à 0 si on n'obtient pas de 1 et sinon, égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un 1.

1. Déterminer, pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, la loi de N_k.
2. Déterminer la loi de X.
3. Vérifier que

$$\sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=k]) = 1$$

Exercice 6 – Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue deux tirages successifs d'une boule sans remise. On note Z la variable aléatoire égale au plus petit des deux numéros.

1. Déterminer la loi de Z.
2. Vérifier que

$$\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z=k]) = 1$$

Espérance et variance

Exercice 7 – Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la suivante

k	-3	-2	1	2	4
$\mathbb{P}([X=k])$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$

1. Que vaut $\mathbb{P}(X < -1)$?
2. Que vaut $\mathbb{P}(X \geqslant 0)$?
3. Calculer l'espérance de X.
4. Calculer la variance de X.

5. Déterminer la loi de $Y = |X-1|$.

Exercice 8 – Soit X une variable aléatoire de loi donnée par

k	-1	0	1
$\mathbb{P}([X=k])$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

Déterminer l'espérance de $Y = X^2+3$ de deux façons différentes :

1. en déterminant la loi de Y;
2. en appliquant le théorème de transfert.

Exercice 9 – Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues. On tire 2 boules successivement sans remise. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

1. Déterminer la loi de X (cf Exercice 2).
2. Déterminer l'espérance de X.
3. Déterminer la variance de X.

Exercice 10 – On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, l'urne numérotée k comprenant k boules numérotées de 1 à k indiscernables au toucher. On réalise l'expérience aléatoire suivante. On choisit d'abord au hasard et sans préférence une urne, puis on prélève une boule dans cette urne. On note X le numéro de l'urne choisie et on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
2. Déterminer la loi de Y.
3. Quelle est l'espérance de Y ? Comment l'interprétez-vous ?

Reconnaître et manipuler les lois usuelles

Exercice 11 – On considère un jeu de 32 cartes traditionnel et on pioche simultanément deux cartes dans le paquet. Si les deux cartes tirées sont de même valeur, on dit qu'il y a "bataille" et on pose $B=1$, dans le cas contraire, on pose $B=0$. Donner la loi de B. Donner son espérance et sa variance.

Exercice 12 – On lance deux dés équilibrés à six faces. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient deux numéros identiques et 0 sinon. Donner la loi de X.

Exercice 13 – On effectue 360 lancers d'un même dé cubique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de 5 obtenus. Donner la loi de X. Donner son espérance et sa variance.

Exercice 14 – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Les résultats de X sont censés être affichés par un compteur mais celui-ci est détraqué : lorsque X prend une valeur non nulle, le compteur affiche la bonne valeur de X, mais lorsque X prend la valeur 0, le compteur affiche un entier au hasard entre 1 et n. On note Y la variable aléatoire égale au nombre affiché par le compteur.

1. Donner $Y(\Omega)$.
2. Soient $i \in [\![0,n]\!]$ et $k \in [\![1,n]\!]$. Déterminer $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y=k])$.
3. En déduire la loi de Y. *On pourra utiliser la formule des probabilités totales.*
4. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 15 – Edhec 2018, Maths S. Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0. Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O. Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant n ($n \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisses $0,1,\ldots,n$. Pour tout entier naturel n, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$).

1. (a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X_n.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n possède une espérance et une variance à déterminer.
2. On note Y le rang du premier retour à l'origine du mobile. On admet que les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$ sont mutuellement indépendantes.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $[Y=n]$ à l'aide des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
   (b) En déduire que,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(Y=n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$