TD 17 – Variables Aléatoires Finies

Savoir déterminer une loi

Exercice 1 – On lance deux dés équilibrés à six faces. On note S la variable aléatoire donnant la somme des deux dés et X la variable aléatoire donnant la plus grande valeur obtenue parmi les deux dés. Donner les lois de S et de X.

La loi de probabilité pour S (somme des deux dés) est :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

La loi de probabilité pour X (max des deux dés) est :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Exercice 2 – Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues. On tire 2 boules successivement sans remise. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

1. Donner $X(\Omega)$.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

2. Déterminer la loi de X.

La loi de X est donnée par

k	0	1	2
$\mathbb{P}([X = k])$	$\frac{11}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{12}$

3. Déterminer la loi de $Y = (X-1)^2$.

La loi de $Y = (X-1)^2$ est donnée par

k	0	1
$\mathbb{P}([Y = k])$	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{12}$

Exercice 3 – Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues. On tire 2 boules successivement avec remise. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

1. Donner $X(\Omega)$.

$$X(\Omega) = \{0,1,2\}$$

2. Déterminer la loi de X.

La loi de X est donnée par

k	0	1	2
$\mathbb{P}([X=k])$	$\frac{121}{256}$	$\frac{110}{256}$	$\frac{25}{256}$

3. Déterminer la loi de $Y = (X-1)^2$.

La loi de $Y = (X-1)^2$ est donnée par

k	0	1
$\mathbb{P}([Y=k])$	$\frac{110}{256}$	$\frac{146}{256}$

Exercice 4 – Un joueur mise 1 euro sur un entier entre 1 et 6 puis il jette deux dés.

- Si l'entier choisi sort une fois, le joueur gagne deux euros.
- Si l'entier choisi sort deux fois, le joueur gagne trois euros.
- Si l'entier choisi ne sort à aucun des deux lancers, le joueur perd sa mise.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur (en comptant sa mise initiale). Déterminer la loi de X.

La loi de X est donnée par

k	-1	1	2
$P(X=k)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Exercice 5 – On considère une urne contenant $n \geqslant 2$ boules numérotées 1 à n. On effectue une succession de $n+1$ tirages avec remise. On note, pour $k \in [\![1, n+1]\!]$, N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k-ième tirage et on note X la variable aléatoire égale à 0 si on n'obtient pas de 1 et sinon, égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un 1.

1. Déterminer, pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, la loi de N_k.

   Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Les tirages étant réalisés avec remise, l'urne contient toujours n boules ainsi, comme le tirage est **uniforme**,
   $$N_k(\Omega) = [\![1, n]\!]$$
   et,
   $$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad P(N_k = i) = \frac{1}{n}$$

2. Déterminer la loi de X.

   Tout d'abord,
   $$X(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$$

   - Déterminons d'abord $P[X = 0]$. On a,
   $$[X = 0] = \overline{[N_1 = 1]} \cap \overline{[N_2 = 1]} \cap \cdots \cap \overline{[N_{n+1} = 1]}$$
   Les tirages étant réalisés avec remise, ils sont indépendants donc les événements $\overline{[N_1 = 1]}$, $\overline{[N_2 = 1]}, \ldots, \overline{[N_{n+1} = 1]}$ sont **mutuellement indépendants**. Ainsi,
   $$P(X = 0) = \prod_{k=1}^{n+1} P(\overline{[N_k = 1]}) = \prod_{k=1}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$
   - Soit $i \in [\![1, n+1]\!]$. Déterminons d'abord $P[X = i]$. On a,
   $$[X = i] = \overline{[N_1 = 1]} \cap \cdots \cap \overline{[N_{i-1} = 1]} \cap [N_i = 1]$$
   Par **indépendance mutuelle**, on a
   $$P(X = i) = \prod_{k=1}^{i-1} P(\overline{[N_k = 1]}) \times P(N_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{i-1} \times \frac{1}{n}$$

3. Vérifier que
   $$\sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = k]) = 1$$

   On a,
   $$\sum_{i=0}^{n+1} P(X = i) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{i-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} + \frac{1}{n} \times \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = 1$$

Exercice 6 – Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue deux tirages successifs d'une boule sans remise. On note Z la variable aléatoire égale au plus petit des deux numéros.

1. Déterminer la loi de Z.

   On a $Z(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et
   $$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \mathbb{P}([Z = k]) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

2. Vérifier que
   $$\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z = k]) = 1$$

   On a
   $$\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z = k]) = \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} (2n) - 2 \sum_{k=1}^{n} k \right) = \frac{1}{n(n-1)} \left(2n^2 - n(n+1) \right) = 1$$

Espérance et variance

Exercice 7 – Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la suivante

k	-3	-2	1	2	4
$\mathbb{P}([X=k])$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$

1. On a
$$\mathbb{P}(X < -1) = \frac{2}{5}$$
2. On a
$$\mathbb{P}(X \geqslant 0) = \frac{3}{5}$$
3. Comme X est une v.a **finie**, elle admet une espérance donnée par
$$\mathbb{E}(X) = \frac{9}{20}$$
4. Comme X est une v.a **finie**, par **théorème de transfert**, X^2 admet une espérance donnée par
$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{25}{4}$$
et donc X admet une variance donnée par
$$V(X) = \frac{2419}{400}$$
5. On a $Y(\Omega) = \{0, 1, 3, 4\}$ et

k	0	1	3	4
$\mathbb{P}([Y=k])$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{20}$

Exercice 8 – Soit X une variable aléatoire de loi donnée par

k	-1	0	1
$\mathbb{P}([X=k])$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

Déterminer l'espérance de $Y = X^2+3$ de deux façons différentes :

1. en déterminant la loi de Y ;

Tout d'abord,

$$Y(\Omega) = \{(-1)^2+3, 0^2+3, 1^2+3\} = \{3,4\}$$

Puis, on a

$$\mathbb{P}(Y=3) = \mathbb{P}(X^2+3=3) = \mathbb{P}(X^2=0) = \mathbb{P}(X=0) = \frac{3}{10}$$

et de même,

$$\mathbb{P}(Y=4) = \mathbb{P}(X^2+3=4) = \mathbb{P}(X^2=1) = \mathbb{P}(X=1 \cup X=-1) = \mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=-1) = \frac{1}{10}+\frac{6}{10} = \frac{7}{10}$$

Ainsi, la loi de Y est donnée par

k	3	4
$\mathbb{P}([Y=k])$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$

Comme Y est une v.a **finie**, elle admet une espérance donnée par

$$\mathbb{E}(Y) = 3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{7}{10} = \frac{37}{10}$$

2. en appliquant le théorème de transfert.

Comme Y est une v.a **finie**, elle admet une espérance et par **théorème de transfert**,

$$\mathbb{E}(Y) = [(-1)^2+3]\times\frac{1}{10}+[(0)^2+3]\times\frac{3}{10}+[(1)^2+3]\times\frac{6}{10} = \frac{37}{10}$$

Exercice 9 – Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues. On tire 2 boules successivement sans remise. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

1. Déterminer la loi de X (cf Exercice 2).

   La loi de X est donnée par

k	0	1	2
$\mathbb{P}([X = k])$	$\frac{11}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{12}$

2. Déterminer l'espérance de X.

   La v.a X est **finie** donc elle admet une espérance donnée par,
   $$\mathbb{E}(X) = \frac{5}{8}$$

3. Déterminer la variance de X.

   La v.a X est **finie** donc, par **théorème de transfert**, X^2 admet une espérance qui vaut.
   $$\mathbb{E}(X^2) = \frac{19}{24}$$
   Puis, X admet une variance qui vaut
   $$V(X) = \frac{77}{192}$$

Exercice 10 – On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, l'urne numérotée k comprenant k boules numérotées de 1 à k indiscernables au toucher. On réalise l'expérience aléatoire suivante. On choisit d'abord au hasard et sans préférence une urne, puis on prélève une boule dans cette urne. On note X le numéro de l'urne choisie et on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?

   On choisit d'abord au hasard, de manière **équiprobable**, une urne parmi les n urnes. Ainsi, X suit une loi **uniforme** sur $\{1,\dots,n\}$.

2. Déterminer la loi de Y.

   Tout d'abord,
$$Y(\Omega) = \{1,\dots,n\}.$$
   Soit $k \in \{1,\dots,n\}$. D'après la **formule des probabilités totales**, comme $([X=i])_{i=1,\dots n}$ est un SCE, on a
$$\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X=i)\times P_{X=i}(Y=k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\times P_{X=i}(Y=k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_{X=i}(Y=k)$$
   Or, dans l'urne i, il y a i boules numérotées de 1 à i que l'on tire de manière équiprobable, donc,
$$P_{X=i}(Y=k) = \begin{cases} \frac{1}{i} & \text{si } k \leqslant i \\ 0 & \text{si } k > i \end{cases}$$
   Ainsi,
$$\mathbb{P}(Y=k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_{X=i}(Y=k) = \frac{1}{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i}$$

3. Quelle est l'espérance de Y ? Comment l'interprétez-vous ?

   Comme Y est une v.a **finie**, elle admet une espérance donnée par
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{n} k\times\mathbb{P}(Y=k) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{k}{i} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\frac{k}{i} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\frac{i(i+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(i+1) \\
&= \frac{1}{2n}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right) \\
&= \frac{1}{2n}\times\frac{n^2+3n}{2} \\
&= \frac{n+3}{4}
\end{aligned}$$

Reconnaître et manipuler les lois usuelles

Exercice 11 – On considère un jeu de 32 cartes traditionnel et on pioche simultanément deux cartes dans le paquet. Si les deux cartes tirées sont de même valeur, on dit qu'il y a "bataille" et on pose $B = 1$, dans le cas contraire, on pose $B = 0$. Donner la loi de B. Donner son espérance et sa variance.

On a $B \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{3}{31}\right)$. Donc

$$\mathbb{E}(B) = \frac{3}{31} \qquad \text{et} \qquad V(B) = \frac{84}{961}$$

Quelques détails :

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{\text{nbre de façons d'avoir Bataille}}{\text{nbre de façons d'avoir deux cartes simultanément}}$$

pour avoir Bataille (= deux cartes de même valeur)
1) on choisit une des huit valeurs (7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as)
2) puis on choisit deux cartes de la valeur choisie parmi les quatre possibles (de coeur ou pique ou carreau ou trèfle)

$$= \frac{\binom{8}{1}\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}}$$

$$= \frac{\frac{8!}{1!\,7!} \times \frac{4!}{2!\,2!}}{\frac{32!}{2!\,30!}}$$

$$= \frac{8 \times \frac{4\times 3}{2}}{\frac{32\times 31}{2}}$$

$$= \cancel{8} \times \cancel{4} \times 3 \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{32}\times 31}$$

$$= \frac{3}{31}$$

Exercice 12 – On lance deux dés équilibrés à six faces. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient deux numéros identiques et 0 sinon. Donner la loi de X.

Par construction, la variable aléatoire est à valeurs dans $\{0,1\}$. De plus, comme les lancers de dés suivent une loi uniforme,

$$\mathbb{P}([X=1]) = \frac{\text{nbre issues qui nous intéressent}}{\text{nbre issues totales}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

et

$$\mathbb{P}([X=0]) = \frac{\text{nbre issues qui nous intéressent}}{\text{nbre issues totales}} = \frac{36-6}{36} = \frac{5}{6}$$

Donc, X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

Exercice 13 – On effectue 360 lancers d'un même dé cubique parfaitement équilibré. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de 5 obtenus. Donner la loi de X. Donner son espérance et sa variance.

On a $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(360, \frac{1}{6}\right)$. Donc

$$\mathbb{E}(X) = 60 \qquad \text{et} \qquad V(X) = 50$$

Exercice 14 – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Les résultats de X sont censés être affichés par un compteur mais celui-ci est détraqué : lorsque X prend une valeur non nulle, le compteur affiche la bonne valeur de X, mais lorsque X prend la valeur 0, le compteur affiche un entier au hasard entre 1 et n. On note Y la variable aléatoire égale au nombre affiché par le compteur.

1. Donner $Y(\Omega)$.

   On a :
$$Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$$

2. Soient $i \in [\![0,n]\!]$ et $k \in [\![1,n]\!]$. Déterminer $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y=k])$.

   Soit $k \in [\![1,n]\!]$. On a
   - Si $i = 0$, alors
$$\mathbb{P}_{[X=i]}([Y=k]) = \frac{1}{n}$$
   - Si $i \in [\![1,n]\!]$, alors
$$\mathbb{P}_{[X=i]}([Y=i]) = 1$$
     et si $k \neq i$,
$$\mathbb{P}_{[X=i]}(Y=k) = 0$$

3. En déduire la loi de Y. *On pourra utiliser la formule des probabilités totales.*

   Soit $k \in [\![1,n]\!]$. D'après la **formule des probabilités totales**,
$$\mathbb{P}([Y=k]) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X=i])\mathbb{P}_{[X=i]}([Y=k]) = \frac{(1-p)^n}{n} + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

4. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

   Comme Y est une variable aléatoire **finie**, elle admet une espérance donnée par,
$$\mathbb{E}(Y) = \frac{(1-p)^n(n+1) - 2np}{2}$$