Devoir maison 3

- ***Obligatoire***. *À rendre pour le lundi 24 février 2025.*
- *Des* ***indications*** *sur disponible sur le Cahier de Prépa.*
- *Les résultats finaux doivent être* ***encadrés.***

Exercice 1 – Suites implicites. On considère la fonction $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \qquad f(x) = \frac{\exp(x)}{x-1}$$

1. Dresser le tableau de variations de f (avec les limites en $+\infty$, en $-\infty$, en 1^- et en 1^+).
2. Démontrer que f réalise une bijection de $]-\infty,1[$ vers un intervalle J à déterminer.
3. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = -n$ possède une unique solution dans $]-\infty,1[$, que l'on notera u_n.
4. Par construction, quelle information a-t-on sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en terme de minoration ou de majoration ?
5. Comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(u_n)$ et $f(u_{n+1})$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
6. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\ell \in]-\infty,1]$.
7. Montrer par l'absurde que $\ell = 1$.

Exercice 2 – Variables aléatoires (Ecricome 2023, Maths E). Soit n un entier naturel non nul. Une urne contient n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans l'urne. Si cette boule tirée porte le numéro k, on place alors dans une seconde urne toutes les boules suivantes : une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, ..., jusqu'à k boules numérotées k. Les boules de cette deuxième urne sont aussi indiscernables au toucher. On effectue alors un second tirage d'une boule dans la seconde urne. Et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule tirée.

1. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
2. Déterminer $Y(\Omega)$.
3. Soit $k \in \{1,\dots,n\}$.
   (a) On suppose que l'évènement $[X = k]$ est réalisé. Déterminer, en fonction de k, le nombre total de boules présentes dans la seconde urne.
   (b) Pour tout entier $j \in \{1,\dots,n\}$, exprimer $P_{[X=k]}(Y = j)$ en fonction de k et j. *On distinguera les cas $j \leqslant k$ ou $j \geqslant k+1$.*
4. (a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel k non nul,
   $$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$
   (b) En déduire que, pour tout élément j de $Y(\Omega)$,
   $$P(Y = j) = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$
5. Justifier que Y admet une espérance et montrer que
   $$E(Y) = \frac{n+2}{3}$$

Exercice 3 – Python.

1. Recopier et compléter le programme Python suivant pour qu'il affiche la courbe de la fonction f sur $[-1,1]$ où f est la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2 + x$$

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def f(x):
    return(.........................)

abscisses = .........................
ordonnees = .........................
plt.plot(abscisses,ordonnees)
plt.show()
```

2. Recopier et compléter le programme Python suivant pour qu'il affiche les onze premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (de u_0 à u_{10}) où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \exp\left(-u_n^2\right)$$

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def suite(n):
    u = ...........
    for ...............
        ..........
    return(u)


abscisses = ......................
ordonnees = ..................
plt.plot(abscisses,ordonnees, '+')
plt.show()
```