DEVOIR MAISON 3

Indications.

Exercice 1 – Suites implicites. Tout l'exercice ressemble très fortement à l'Exemple 2.23 du Chapitre 16)
On considère la fonction $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \qquad f(x) = \frac{\exp(x)}{x-1}$$

1. Dresser le tableau de variations de f (avec les limites en $+\infty$, en $-\infty$, en 1^- et en 1^+).

   - Limite en $-\infty$. On l'obtient directement par opérations.
   - Limite en $+\infty$. A priori, on a une F.I. Pour la lever, on utilise la factorisation suivante.

   $$\forall x > 1, \qquad f(x) = \frac{e^x}{x} \times \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$$

     Puis, on obtient la limite par opérations et en utilisant les croissances comparées.
   - Limites en 1^+ et en 1^-. Elles s'obtiennent directement par opérations en faisant attention que

   $$\lim_{x\to 1^-} x-1 = 0^- \qquad \text{alors que} \qquad \lim_{x\to 1^+} x-1 = 0^/$$

   Puis, pour dresser le tableau de variations, il faut par dériver la fonction f et montrer que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \qquad f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

   Donc, en étudiant le terme de facteurs des facteurs (e^x, $x-2$, $(x-1)^2$), on peut en déduire le tableau de signe de f' puis le tableau de variations de f.

2. Démontrer que f réalise une bijection de $]-\infty, 1[$ vers un intervalle J à déterminer.

   On doit vérifier les trois hypothèses du thm de la bijection (cf le polycopié du chapitre 16). Puis, en appliquant le **théorème de la bijection**, on obtient que

   la fonction f réalise une bijection de $]-\infty, 1[$ vers un intervalle J.

   Les bornes de l'intervalle J se trouvent grâce aux limites en $-\infty$ et en 1^- de la fonction (et on met les bornes dans le bon sens.

3. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = -n$ possède une unique solution dans $]-\infty, 1[$, que l'on notera u_n.

   D'après la question précédente, la fonction f réalise une bijection de $]-\infty, 1[$ vers J, c'est-à-dire,

   $$\forall y \in J \ \ \exists! x \in]-\infty, 1[, \ \ y = f(x)$$

   Il s'agit juste de prendre $y = -n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) et donc de vérifier que $y = -n$ appartienne bien à J l'intervalle trouvé à la question précédente.

4. Par construction, quelle information a-t-on sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en terme de minoration ou de majoration ?

   Par construction,

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n \in]-\infty, 1[$$

   Et donc....

5. Comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(u_n)$ et $f(u_{n+1})$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par construction de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

   $$f(u_n) = -n \qquad \text{et} \qquad f(u_{n+1}) = ...$$

   Donc,

   $$f(u_n) \ (\ \geqslant \ \text{ou} \ \leqslant \ ) \ f(u_{n+1}).$$

   Puis, on applique f^{-1} en faisant attention à son sens de monotonie et en utilisant le fait que

   $$\forall x \in]-\infty, 1[, \qquad f^{-1}(f(x)) = x$$

6. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\ell \in]-\infty, 1]$.

   On utilise le **théorème de la limite monotone**

7. Montrer par l'absurde que $\ell = 1$.

   D'après la question précédente, on sait déjà que $\ell \leqslant 1$. On suppose par l'absurde que $\ell < 1$. Par construction, on sait que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f(u_n) = -n$$
   c'est-à-dire
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{\exp(u_n)}{u_n - 1} = -n$$
   Et en passant à la limite dans cette égalité, on obtient une absurdité.

Exercice 2 – Variables aléatoires (Ecricome 2023, Maths E). Soit n un entier naturel non nul. Une urne contient n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans l'urne. Si cette boule tirée porte le numéro k, on place alors dans une seconde urne toutes les boules suivantes : une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, ..., jusqu'à k boules numérotées k. Les boules de cette deuxième urne sont aussi indiscernables au toucher. On effectue alors un second tirage d'une boule dans la seconde urne. Et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule tirée.

1. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

   La loi de X correspond à un choix **équiprobable** de tirer un numéro entre 1 et n. Donc il faut reconnaître une loi usuelle parmi les quatre de cours (loi certaine, loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale) et utiliser les formules pour l'espérance et la variance correspondantes.

2. Déterminer $Y(\Omega)$.

   La valeur de Y correspond à la valeur de la deuxième boule tirée.
   - Si au premier tirage, on a obtenu une boule numérotée 1, alors le deuxième tirage se fait dans une urne contenant seulement 1 boule numérotée 1. Dans ce cas, la seule valeur possible de Y est 1.
   - Si au premier tirage, on a obtenu une boule numérotée 2, alors le deuxième tirage se fait dans une urne contenant 1 boule numérotée 1 et 2 boules numérotées 2. Dans ce cas, les seules valeurs possibles de Y sont 1 et 2.
   - (...)
   - Si au premier tirage, on a obtenu une boule numérotée n, alors le deuxième tirage se fait dans une urne contenant 1 boule numérotée 1, 2 boules numérotées 2,... et n boules numérotées n. Dans ce cas, les seules valeurs possibles de Y sont 1,2, ... et n.

   Ainsi,
   $$Y(\Omega) = \dots$$

3. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$.

   (a) On suppose que l'évènement $[X = k]$ est réalisé. Déterminer, en fonction de k, le nombre total de boules présentes dans la seconde urne.

   Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Si l'évènement $X = k$ est réalisé, dans la second urne, on a mis une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, ..., jusqu'à k boules numérotées k. Donc, le nombre total de boules dans la seconde urne dans ce cas est,
   $$\underbrace{1}_{\text{1 boule num 1}} + \underbrace{2}_{\text{2 boule num 2}} + \underbrace{3}_{\text{3 boule num 3}} + \dots + \underbrace{k}_{\text{k boule num k}} = ???$$

   (b) Pour tout entier $j \in \{1, \dots, n\}$, exprimer $P_{[X=k]}(Y = j)$ en fonction de k et j. *On distinguera les cas $j \leqslant k$ ou $j \geqslant k+1$.*

   Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Si l'évènement $X = k$ est réalisé, dans la seconde urne, il n'y a que des boules dont le numéro est compris entre 1 et k. Donc, si $j \geqslant k+1$, la probabilité de tirer une boule j est donnée par,..
   $$\forall j \in \{1, \dots, n\},\ j \geqslant k+1, \qquad P_{X_k}(Y_j) = ???$$
   Sinon, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ avec$j \leqslant k$, il y a j boules numérotées j dans la seconde urne, et au total, il y a ?? boules au total d'après la Question 3(a). Comme le tirage est **uniforme**, on obtient finalement que
   $$\forall j \in \{1, \dots, n\},\ j \leqslant k, \qquad P_{X_k}(Y_j) = \dots$$

4. (a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel k non nul,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{a(k+1)+bk}{k(k+1)} = \frac{(a+b)k+a}{k(k+1)}.$$

Donc, on veut que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad (a+b)k+a = 1.$$

En identifiant les coefficients, on obtient les valeurs de a et de b.

(b) En déduire que, pour tout élément j de $Y(\Omega)$,

$$P(Y=j) = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$

Soit $j \in \{1,\dots,n\}$. La famille $(X=k)_{k=1,\dots,n}$ forme un système complet d'évènements. Donc, en utilisant la formule des **probabilités totales**, on obtient

$$P(Y_j) = \sum_{k=1}^{n} P(X_k) P_{X_k}(Y_j)$$

Donc, en utilisant les résultats des Questions 1 et 3(b), on peut montrer que

$$P(Y_j) = \frac{2j}{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Puis, on calcule la somme en utilisant le résultat de la Question 4(a) et en remarquant un **télescopage**.

5. Justifier que Y admet une espérance et montrer que

$$E(Y) = \frac{n+2}{3}$$

On a

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{j=1}^{n} j \times P(Y_j)$$

Puis on utilise le résultat de la question précédente. En utilisant les règles de calculs sur les sommes, on peut d'abord montrer que

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{2}{n(n+1)} \left((n+1) \sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} j^2 \right)$$

Puis, on utilise les formules du cours pour calculer les deux sommes et on simplifie le calcul au maximum.

Exercice 3 – Python.

1. Recopier et compléter le programme Python suivant pour qu'il affiche la courbe de la fonction f sur $[-1,1]$ où f est la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2 + x$$

S'inspirer des Exercices 4 et 7 du TP 05.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

#On commence par définir la fonction f
def f(x):
    return(..................)

#On trace le graphe de la fonction f
##On choisit un grand nombre de points entre -1 et 1
abscisses = ..................
##On calcule les ordonnées correspondantes pour que les points
##soient sur la courbe de f
ordonnees = ..................
##Puis on demande à Python de tracer le graphe
plt.plot(abscisses,ordonnees)
plt.show()
```

2. Recopier et compléter le programme Python suivant pour qu'il affiche les onze premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (de u_0 à u_{10}) où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = \exp\left(-u_n^2\right)$$

S'inspirer des Exercices 6 et 11 du TP 05.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

#On commence par définir une fonction
##qui permet d'obtenir les différentes valeurs de la suite
def suite(n):
    u = ..................
    for k in range(........ , .............):
        u = ..................
    return(u)

#On trace le graphe de la fonction f
##On choisit tous les entiers de 0 à 10
abscisses = ..................
##On calcule les ordonnées correspondantes pour que les points
##soient des valeurs de la suite
ordonnees = ..................
##Puis on demande à Python de tracer le graphe
##(sans relier les différents points entre eux)
plt.plot(abscisses,ordonnees, '+')
plt.show()
```