18 Séries numériques

Pour bien démarrer

#1 - Connaître les sommes finies usuelles.

$i)$ Pour $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $\qquad$ $ii)$ $\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$

#2 - Vers la notion de série.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

D'après la formule pour la somme finie d'une suite géométrique, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Or, d'après le théorème sur la limite d'une suite géométrique, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \qquad \text{car} \qquad -1 < \frac{1}{2} < 1.$$

Donc,

- La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- Et sa limite vaut

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$$

On le note

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$$

1 Convergence d'une série numérique

1.1 Définition d'une série numérique

Définition 1.1 Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle **somme partielle d'indice** n de la série de terme général u_k la quantité

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

- On appelle suite des **sommes partielles** de la série de terme général $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- La suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est plus souvent désignée comme la **série de terme général** $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et qu'on note

$$\sum u_k \qquad \text{ou encore} \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \qquad \text{ou} \qquad \sum_{k\geqslant 0} u_k.$$

(!) Il faut faire très attention à la *nature* des objets mathématiques manipulés.

u_k (pour un k donné)	$(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$	S_n (pour un n donné)	$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$
Nombre réel	Suite	Nombre réel	Suite	Suite

(!) Pour les séries formées à partir de suites définies uniquement à partir d'un certain rang k_0, on ajuste la définition de série et on considère plutôt

$$\sum_{k\geqslant k_0} u_k.$$

Exemple 1.2 — Calcul de sommes partielles.

Série	Terme général	S_0	S_1	S_3	S_n (pour un n donné)	$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} 1$	$\forall k\in\mathbb{N},\ u_k=1$	$S_0=1$	$S_1=1+1=2$	$S_3=1+1+1+1=4$	$S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}1=n+1$	$(n+1)_{n\in\mathbb{N}}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} k$	$\forall k\in\mathbb{N},\ u_k=k$	$S_0=0$	$S_1=0+1=1$	$S_3=0+1+2+3=6$	$S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$	$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} 2^k$	$\forall k\in\mathbb{N},\ u_k=2^k$	$S_0=1$	$S_1=1+2=3$	$S_3=1+2+4+8=15$	$S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}2^k=(2^{n+1}-1)$	$(2^{n+1}-1)_{n\in\mathbb{N}}$
$\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k}$	$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ u_k=\frac{1}{k}$	x	$S_1=1$	$S_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$	$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$	$(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exemple 1.3 Expliciter la série suivante

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{k(k+1)}$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Par télescopage, on a

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Donc, la suite des sommes partielles de cette série est donnée par

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

1.2 Convergence d'une série numérique

Définition 1.4 Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

- La série $\sum u_k$ est dite **convergente** lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}u_k=\ell\in\mathbb{R}.$$

  Dans ce cas, la limite ℓ de la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **somme** de la série et est notée

$$\ell=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k.$$

- La série $\sum u_k$ est dite **divergente** lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, c'est-à-dire lorsqu'elle admet une limite infinie ou pas de limite.

! Il faut faire très attention à la *nature* des objets mathématiques manipulés.

u_k (pour un k donné)	$(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$	S_n (pour un n donné)	$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}u_k$	$\sum\limits_{k=0}^{+\infty}u_k$
Nbre réel	Suite	Nbre réel	Suite	Suite	Nbre réel <u>si</u> existence

? Pour étudier la nature (convergence/divergence) de la série $\sum u_k$, on peut

- **Calculer**, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la **somme partielle** S_n.
- Étudier la **convergence** de la **suite des sommes partielles** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1.5 Étudier la nature de la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} k^2$.

On peut calculer directement les sommes partielles de la manière suivante,

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad S_n=\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On en déduit que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite donnée par

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty.$$

Donc,

$$\text{la série }\sum_{k\in\mathbb{N}}k^2\text{ diverge }.$$

Exemple 1.6 Étudier la nature de la série $\sum \frac{1}{3^k}$.

On peut calculer directement les sommes partielles de la manière suivante,

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right).$$

On en déduit que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie donnée par

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{3}{2}\qquad\text{car}\qquad\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=0\qquad\text{car }-1<\frac{1}{3}<1.$$

Donc,

$$\text{la série }\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{3^k}\text{ converge et que sa somme vaut }\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k}=\frac{3}{2}.$$

Exemple 1.7 Étudier la nature de la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{k(k+1)}$.

Grâce à un télescopage, on peut calculer directement les sommes partielles de la manière suivante,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie donnée par

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=1\qquad\text{car}\qquad\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Donc,

$$\text{la série }\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{k(k+1)}\text{ converge et que sa somme vaut }\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1.$$

Un des moyen d'étudier la nature d'une série est de passer par la suite de ces sommes partielles. Cependant, l'enjeu du chapitre est le suivant : *comment en étudiant seulement la suite* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$*, peut-on déterminer la nature de la série* $\sum u_k$ *?* Seule une partie de la réponse sera fournie cette année, elle sera étoffée l'année prochaine.

2 Lien entre la série et le terme général

Avec les notations de la section précédente, remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \cancel{u_0} + \cancel{u_1} + \ldots + \cancel{u_n} + u_{n+1} - (\cancel{u_0} + \cancel{u_1} + \ldots + \cancel{u_n}) = u_{n+1}$$

Ainsi, il y a un lien direct entre la série $\sum u_k$ (c'est-à-dire la suite des sommes partielles) et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par exemple,

- Si la série $\sum u_k$ est convergente (c'est-à-dire si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie) alors, en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = \lim_{k\to+\infty} (S_k - S_{k-1}) = 0.$$

- Si la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est positive, alors la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2.1 Condition nécessaire de convergence

Proposition 2.1 Voici deux formulations équivalentes du même résultat.

- Si la série $\sum u_k$ converge, alors la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Si la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_k$ diverge (grossièrement).

! La réciproque est fausse : il ne suffit pas qu'une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour que la série $\sum u_k$ converge. Prenons la suite définie par,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad u_k = \ln(k+1) - \ln(k).$$

- D'une part, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 car

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad u_k = \ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

- Néanmoins, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} u_k$ diverge car

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

? Lorsque l'on étudie une série, la première chose à faire est donc de vérifier que le **terme général** de la série **tend vers 0**. Si ce n'est pas le cas, alors la série diverge (grossièrement) et l'étude est terminée. Sinon, il reste du travail pour déterminer s'il y a convergence ou divergence.

Exemple 2.2 — Repérer au premier coup d'oeil une divergence grossière.

Série	Convergence
$\sum_{k\in\mathbb{N}} k$	Divergence grossière
$\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^k$	Divergence grossière
$\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k$	Divergence grossière

Série	Convergence
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k}{k+1}$	Divergence grossière
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k}$	On n'en sait rien !
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$	On n'en sait rien !

2.2 Cas particuliers des séries à terme général positif

Soient $\sum u_k$ une série et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa suite des sommes partielles. On a déjà remarqué que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_{n+1} - S_n = u_{n+1},$$

et donc que si la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est positive, alors la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Ainsi, le théorème de la limite monotone donne le résultat suivant.

Proposition 2.3 Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs.

- Si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors elle converge et donc la série $\sum u_k$ converge.
- Si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$ et donc la série $\sum u_k$ diverge.

Pour étudier la nature (convergence/divergence) de la série $\sum u_k$, on peut

- Montrer que la série est à termes **positifs**.
- Montrer que la suite des sommes partielle $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée**.

Exemple 2.4 Montrer que la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$ converge.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \frac{1}{k^2} \geqslant 0$.
- Montrons que la suite des sommes partielles est majorée. Pour tout $n \geqslant 2$ et $k \in [\![2, n]\!]$, on a
$$k-1 \leqslant k \quad \text{donc} \quad k(k-1) \leqslant k^2 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}.$$
Donc, en sommant ces inégalités, on obtient, pour tout $n \geqslant 2$,
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \quad \text{donc} \quad S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$
Or, par télescopage, on obtient
$$\forall n \geqslant 2, \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n}.$$
Et donc, finalement,
$$\forall n \geqslant 2, \qquad S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2.$$

Ainsi, la série est à termes positifs, et ses sommes partielles sont majorées donc la série converge mais a priori, on ne peut pas calculer sa somme. *En fait, on peut montrer avec des techniques d'analyse hors programme que*
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exemple 2.5 Montrer que la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k}$ diverge. *On pourra utiliser le fait que* $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \frac{1}{k} \geqslant 0$.
- Montrons que la suite des sommes partielles n'est pas majorée (ou directement qu'elle diverge vers $+\infty$). Pour tout $n \geqslant 1$ et $k \in [\![1, n]\!]$, on a
$$\frac{1}{k} \geqslant \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$
Donc, en sommant ces inégalités, on obtient, pour tout $n \geqslant 1$,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$
Or, par télescopage, on obtient, pour tout $n \geqslant 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1)$$
Et donc, finalement,
$$\forall n \geqslant 2, \qquad S_n \geqslant \ln(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Donc, par minoration, la suite des sommes partielles diverge vers $+\infty$. Donc la série diverge.

Proposition 2.6 — Théorème de comparaison des séries à termes positifs. Soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
On suppose que
① Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_k \leqslant v_k$.
② La série $\sum v_k$ converge.
Alors la série $\sum u_k$ converge et
$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

Exemple 2.7 Montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2+5}$ converge.

① Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On sait que
$$k^2 + 5 \geqslant k^2$$
Or, la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc,
$$\frac{1}{k^2+5} \leqslant \frac{1}{k^2}$$
Ainsi,
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant \frac{1}{k^2+5} \leqslant \frac{1}{k^2}$$
② La série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$ converge (cf Exemple 2.4 ou car série de Riemann avec $2 > 1$).

Donc, par **comparaison des séries à termes positifs**, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2+5}$ converge.

Proposition 2.8 — Théorème de comparaison des séries à termes positifs. Soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
On suppose que
① Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_k \leqslant v_k$.
② La série $\sum u_k$ diverge.
Alors la série $\sum v_k$ diverge.

Exemple 2.9 Montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge.

① Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$.
② La série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k}$ diverge (cf Exemple 2.5).

Donc, par **comparaison des séries à termes positifs**, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge.

Exemple 2.10 Montrer que la série suivante est divergente
$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{k+1}{k^2}$$

① Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a,
$$\frac{k+1}{k^2} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} \geqslant \frac{1}{k} \qquad \text{car } \frac{1}{k^2} \geqslant 0$$
Donc,
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{k+1}{k^2}$$
② La série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k}$ diverge (cf Exemple 2.5 ou série de Riemann).

Donc, par **comparaison des séries à termes positifs**, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{k+1}{k^2}$ diverge.

2.3 Séries absolument convergentes

Définition 2.11 Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que la série $\sum u_k$ est **absolument convergente** lorsque la série (à termes positifs) $\sum |u_k|$ converge.

Proposition 2.12 Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
On suppose que
① La série $\sum u_k$ est **absolument convergente**.
Alors, la série $\sum u_k$ converge et

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

Ce théorème permet, lorsqu'on a une série dont le signe du terme général est variable, de se ramener à l'étude d'une série à termes positifs, pour laquelle on dispose de plus d'outils.

Exemple 2.13 Étudier la nature de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^k}{k^2}$ en passant par la convergence absolue.

On a,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|\frac{(-1)^k}{k^2}\right| = \frac{1}{k^2}$$

On reconnaît une série de Riemann qui converge car $2 > 1$. Ainsi,

$$\text{la série } \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \left|\frac{(-1)^k}{k^2}\right| \text{ converge}$$

autrement dit,

$$\text{la série } \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^k}{k^2} \text{ converge absolument}$$

Donc,

$$\text{la série } \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^k}{k^2} \text{ converge}$$

(Attention, on ne connaît pas la valeur de la somme par contre !)

3 Séries de référence

3.1 Séries télescopiques

Comme pour les sommes finies, les séries télescopiques de la forme

$$\sum (u_{k+1} - u_k)$$

sont importantes, car les sommes partielles se calculent explicitement.

Exemple 3.1 Étudier la nature de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right)$.

On reconnaît une série télescopique. On peut donc calculer directement les sommes partielles de la manière suivante,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+2} - 1.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie qui vaut -1, c'est-à-dire la série converge et sa somme vaut

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right) = -1.$$

Exemple 3.2 Étudier la nature de la série $\sum_{k\geq 2}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{2}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$.

En écrivant le terme générale de la forme suivante,

$$\forall k \geq 2, \qquad u_k = \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{2}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right),$$

on reconnaît la somme de deux suites télescopiques. On peut donc calculer directement les sommes partielles de la manière suivante, pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Ainsi, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 2}$ admet une limite finie qui vaut $1 - 1/\sqrt{2}$, c'est-à-dire la série converge et sa somme vaut

$$\sum_{k=2}^{+\infty} u_k = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3.2 Séries géométriques et dérivées

Proposition 3.3 Soit $q \in \mathbb{R}$. On considère la série

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} q^k$$

appelée **série géométrique**.

- Si $q \in]-1,1[$ alors la série converge et sa somme est donnée par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \text{et aussi} \qquad \sum_{k=k_0}^{+\infty} q^k = \frac{q^{k_0}}{1-q}.$$

- Si $q \notin]-1,1[$ alors la série diverge (grossièrement)

Esquisse de prevue. Soit $q \in]-1,1[$. On peut calculer explicitement les sommes partielles de la manière suivante,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

en reconnaissant une somme (finie) géométrique. Or,

$$\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0 \qquad \text{car } -1 < q < 1$$

Donc, par opérations,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$$

Cela signifie que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{1-q}$. Autrement dit, la série

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} q^k$$

converge et sa somme vaut

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

■

Exemple 3.4 — Convergence des séries géométriques.

Série	Convergence	Somme
$\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^k$	Divergence	
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{4}\right)^k$	Conv. (série géométrique avec $q=\frac{1}{4}$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$
$\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k$	Divergence	
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{3^k}$	Conv. (série géométrique avec $q=\frac{1}{3}$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{3^k}$	Conv. (série géométrique avec $q=-\frac{1}{3}$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{3}{4}$
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{9}{10^k}$	Conv. (série géométrique avec $q=\frac{1}{10}$ et c.l.)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = 9\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{1-\frac{1}{10}} = 10$
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{k}\right)^k$	On ne sait pas !	
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{5^k}$	Conv. (série géométrique avec $q=\frac{1}{5}$)	$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{5^{k+1}}$	Conv. (série géométrique avec $q=\frac{1}{5}$ et cht indice)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{5^{k+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{5^k} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$

Proposition 3.5 Soit $q\in\mathbb{R}$. On considère les séries

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} kq^{k-1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k\geqslant 2} k(k-1)q^{k-2}$$

appelée respectivement **série géométrique dérivée d'ordre 1** et **d'ordre 2**.

- Si $q\in]-1,1[$ alors les deux séries convergent et leur somme est donnée par

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

- Si $q\notin]-1,1[$ alors les deux séries divergent (grossièrement)

Démonstration. Soit $n\in\mathbb{N}$. On définit la fonction S_n par

$$\forall q\in]-1,1[, \qquad S_n(q) = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

La fonction S_n est une fonction polynomiale, donc en particulier, est dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $q\in]-1,1[$, on a

$$S_n'(q) = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{-(n+1)q^n(1-q)-(1-q^{n+1})\times(-1)}{(1-q)^2} = \frac{-(n+1)q^n(1-q)+1-q^{n+1}}{(1-q)^2}$$

Soit $q\in]-1,1[$ fixe. Notons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n = S_n(q)$. Alors, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite vaut

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Ceci clôt la démonstration pour la série géométrique dérivée d'ordre 1. ∎

Exemple 3.6 — Convergence des séries géométriques dérivées.

Série	Convergence	Somme
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k2^{k-1}$	Divergence	
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{k}{3^{k-1}}$	Conv. (série géo dérivée d'ordre 1 avec $q=\frac{1}{3}$)	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{3^{k-1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9}{4}$
$\sum_{k\geqslant 2} \frac{k(k-1)}{4^{k-2}}$	Conv. (série géo dérivée d'ordre 2 avec $q=\frac{1}{4}$)	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{4^{k-2}} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{128}{27}$
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k+1}{2^k}$	Conv. (série géo dérivée d'ordre 1 avec $q=\frac{1}{2}$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4$

3.3 Série exponentielle

Proposition 3.7 Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la série

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{x^k}{k!}$$

appelée **série exponentielle**. La série converge et sa somme est donnée par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x.$$

Exemple 3.8 — Convergence des séries exponentielles.

Série	Convergence	Somme
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{2^k}{k!}$	Conv. (série exponentielle avec $x=2$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} = \mathrm{e}^2$
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{3^k\times k!}$	Conv. (série exponentielle avec $x=\frac{1}{3}$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k\times k!} = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!}$	Conv. (série exponentielle avec $x=1$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!}$	Conv. (série exponentielle avec $x=-1$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{5^k}{k!}$	Conv. (série exponentielle avec $x=5$)	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5^k}{k!} - 1 = \mathrm{e}^5 - 1$
$\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k!}$	Conv. (série exponentielle avec $x=1$)	$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} - 2$
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}$	Conv. (série exponentielle avec cht indice)	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \mathrm{e}$

3.4 (HP) Séries de Riemann

Le résultat de cette section n'est pas au programme en première année (mais le sera en deuxième année).

Proposition 3.9 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la série

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^\alpha}$$

appelée **série de Riemann**.

- Si $\alpha > 1$ alors la série converge.
- Si $\alpha \leqslant 1$ alors la série diverge.
- Plus précisément, si $\alpha \leqslant 0$, alors la série diverge grossièrement.

Exemple 3.10 — Convergence des séries de Riemann.

Série	Convergence
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k}$	Divergence
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$	Convergence
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} -\frac{1}{k^7}$	Convergence
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} 1$	Divergence (grossière)
$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{(k+1)^2}$	Convergence

Série	Convergence
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{2}{\sqrt{k}}$	Divergence
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$	Convergence
$\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k-1}$	Divergence
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k^{-3}$	Convergence
$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k^2$	Divergence (grossière)

4 Opérations sur les séries convergentes

Proposition 4.1 Soient a et b deux nombres réels, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

1. Si $a \in \mathbb{R}$ est non nul, alors $\sum u_k$ et $\sum a u_k$ ont la même nature. En cas de convergence,
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a u_k = a \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$
2. Si $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont convergentes, alors $\sum (u_k + v_k)$ est aussi convergente et sa somme vaut :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + b v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$
3. Si $\sum u_k$ est convergente, et $\sum v_k$ est divergente, alors $\sum (u_k + v_k)$ est divergente.

Proposition 4.2 Soit $k_0 \in \mathbb{N}^*$. Les séries $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ et $\sum_{k\geqslant k_0} u_k$ sont de même nature. En cas de convergence, on a
$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{k_0-1} u_k$$

Exemple 4.3 Montrer que la série suivante converge et calculer sa somme.
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{5\times 2^k + 1}{k!}$$

(0) **Reconnaître des séries usuelles.** On remarque que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \frac{5\times 2^k + 1}{k!} = 5 \times \frac{2^k}{k!} + \frac{1}{k!}$$

① **Montrer que la série converge.** Les séries $\sum \frac{2^k}{k!}$ et $\sum \frac{1}{k!}$ convergent (séries exponentielles) donc par combinaison linéaire de séries convergentes,
$$\text{la série } \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{5\times 2^k + 1}{k!} \text{ converge.}$$

② **Calculer sa somme**. Comme la série converge, on peut calculer sa somme. On a, par combinaison linéaire de séries convergentes,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5\times 2^k+1}{k!} = 5\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 5e^2 + e^1$$

Exemple 4.4 Montrer que la série suivante converge et calculer sa somme.

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k+1}{2^k}$$

(0) **Reconnaître des séries usuelles.** On remarque que

$$\forall k\in\mathbb{N}, \qquad \frac{k+1}{2^k} = \frac{1}{2}\times k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

① **Montrer que la série converge.** Les séries $\sum k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ et $\sum\left(\frac{1}{2}\right)^k$ convergent (séries géométriques simple et dérivée d'ordre 1) donc par combinaison linéaire de séries convergentes,

$$\text{la série } \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k+1}{2^k} \text{ converge.}$$

② **Calculer sa somme**. Comme la série converge, on peut calculer sa somme. On a, par combinaison linéaire de séries convergentes,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^{k-1}} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4$$

Exemple 4.5 Montrer que la série suivante converge et calculer sa somme.

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{5^{k+2}}{7^{k-1}}$$

(0) **Reconnaître des séries usuelles.** On remarque que

$$\forall k\in\mathbb{N}, \qquad \frac{5^{k+2}}{7^{k-1}} = 5^2\times 7\times\left(\frac{5}{7}\right)^k.$$

① **Montrer que la série converge.** La série $\sum\left(\frac{5}{7}\right)^k$ converge (série géométrique) donc par combinaison linéaire de séries convergentes,

$$\text{la série } \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{5^{k+2}}{7^{k-1}} \text{ converge.}$$

② **Calculer sa somme**. Comme la série converge, on peut calculer sa somme. On a, par combinaison linéaire de séries convergentes,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5^{k+2}}{7^{k-1}} = 5^2\times 7\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^k = 5^2\times 7\times\frac{1}{1-\frac{5}{7}} = \frac{5^2\times 7^2}{2} = \frac{1225}{2}.$$

Exemple 4.6 Montrer que la série suivante converge et calculer sa somme.

$$\sum_{k\geqslant 2}\frac{k^2}{3^k}$$

(0) **Reconnaître des séries usuelles.** On remarque que

$$\forall k\geqslant 2,\qquad \frac{k^2}{3^k}=\frac{k(k-1)+k}{3^k}=\frac{1}{9}\times\frac{k(k-1)}{3^{k-2}}+\frac{1}{3}\times\frac{k}{3^{k-1}}$$

① **Montrer que la série converge.** Les séries $\sum\frac{k(k-1)}{3^{k-2}}$ et $\sum\frac{k}{3^{k-1}}$ convergent (séries géométriques dérivées) donc par combinaison linéaire de séries convergentes,

$$\text{la série }\sum_{k\geqslant 2}\frac{k^2}{3^k}\text{ converge.}$$

② **Calculer sa somme**. Comme la série converge, on peut calculer sa somme. On a, par combinaison linéaire de séries convergentes,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k^2}{3^k}&=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k(k-1)}{3^{k-2}}+\frac{1}{3}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k}{3^{k-1}}\\&=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k(k-1)}{3^{k-2}}+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{3^{k-1}}-1\right)\\&=\frac{1}{9}\times\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}-1\right)\\&=\frac{7}{6}\end{aligned}$$

Exemple 4.7 Montrer que la série suivante converge et calculer sa somme.

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{k(-1)^k}{k!}$$

(0) **Reconnaître des séries usuelles.** On remarque que

$$\forall k\geqslant 1,\qquad \frac{k(-1)^k}{k!}=-\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}$$

① **Montrer que la série converge.** La série $\sum\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}$ converge (série exponentielle avec changement d'indice) donc par combinaison linéaire de séries convergentes,

$$\text{la série }\sum_{k\geqslant 2}\frac{k(-1)^k}{k!}\text{ converge.}$$

② **Calculer sa somme**. Comme la série converge, on peut calculer sa somme. On a, par combinaison linéaire de séries convergentes,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k(-1)^k}{k!}=-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}=-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}=-\mathrm{e}^{-1}.$$