

TD 18 – SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 1 – Étude à la main d'une série (☆☆). On considère la série $\sum u_k$, où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \frac{1}{e^{-k} + e^k}$.

1. Déterminer la monotonie de la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_k \leq e^{-k}$.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un encadrement de S_n .
4. En déduire que la série $\sum u_k$ est convergente. On note S sa somme.
5. Montrer que

$$S \leq \frac{e}{e-1}.$$

Exercice 2 – Série télescopique (☆☆). Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k = \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

1. Déterminer la limite de la suite $(u_k)_{k \geq 2}$. Peut-on conclure sur la nature de la série $\sum_{k \geq 2} u_k$?
2. Pour tout $k \geq 2$, transformer l'expression de u_k pour faire apparaître un télescope.
3. En déduire que la série $\sum_{k \geq 2} u_k$ est divergente.

Exercice 3 – Série télescopique (☆☆). Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\ln(k) \ln(k+1)}$.

1. Déterminer la limite de la suite $(u_k)_{k \geq 2}$. Peut-on conclure sur la nature de la série $\sum_{k \geq 2} u_k$?
2. Pour tout $k \geq 3$, transformer l'expression de u_k pour faire apparaître un télescope.
3. En déduire que la série $\sum_{k \geq 3} u_k$ est convergente et calculer la somme de cette série.

Exercice 4 – Série télescopique (☆☆). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

1. Déterminer les réels a , b et c tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_k = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

2. Pour tout $n \geq 1$, déterminer l'expression de S_n , la somme partielle d'ordre n , en fonction n en utilisant des télescopes.
3. En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} u_k$ est convergente et calculer la somme de cette série.

Exercice 5 – Convergence et Somme (☆☆). Déterminer la nature des séries suivantes et en cas de convergence, donner la somme de la série.

1. $\sum_{k \in \mathbb{N}} (-2)^k$

6. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k-1}}{3^{k+1}}$

11. $\sum_{k \geq 2} \frac{k(k-1)2^{k-2}}{3^{k-2}}$

2. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{3^k}$

7. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-2)^k}{k!}$

12. $\sum_{k \geq 2} \frac{k(k-1)2^k}{5^{k-1}}$

3. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k!}$

8. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-3)^{k-1}}{k!}$

13. $\sum_{k \geq 0} \frac{k+3}{4^k}$

4. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2^{k+1}}{5^k}$

9. $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{k}{3^{k-1}}$

14. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+2}k}{3^k}$

5. $\sum_{k \in \mathbb{N}} k$

10. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k}{(-2)^k}$

15. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k+1}{3^{k+1}}$

Exercice 6 – Convergence et Somme (*).** Déterminer la nature des séries suivantes et en cas de convergence, donner la somme de la série.

$$1. \sum_{k \geq m} q^k, \quad q \in]-1, 1[, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$4. \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k^2}{3^k}$$

$$7. \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k(k+1)}{(k+1)!}$$

$$2. \sum_{k \in \mathbb{N}} q^{2k}, \quad q \in]-1, 1[$$

$$5. \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k+1}{k!}$$

$$8. \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k^2 2^k}{k!}$$

$$3. \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k 2^k}{k!}$$

$$6. \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2^k}{(k+1)!}$$

$$9. \sum_{k \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Exercice 7 – Comparaison pour les séries à termes positifs. Déterminer la nature des séries suivantes

$$1. \sum_{k \geq 3} \frac{1}{k^2 \ln(k)}$$

$$2. \sum_{k \geq 3} \frac{\ln(k)}{k}$$

$$3. \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Exercice 8 – Convergence absolue. Déterminer la nature des séries suivantes

$$1. \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k+1}}{k\sqrt{k}}$$

$$2. \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^k e^{-k}}{k^2}$$

Exercice 9 – Convergence et Somme (*).** Déterminer la nature des séries suivantes et en cas de convergence, donner la somme de la série.

$$1. \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k^2}{(k+1)!}$$

$$2. \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k^3}{k!}$$

Exercice 10 – (*)**. Déterminer la nature des séries suivantes

$$1. \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$2. \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$$

$$3. \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^2 - 1}$$

Exercice 11 – Étude abstraite d'une série (*).** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0, 1[$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
4. Montrer que la série suivante converge et déterminer sa somme

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k^2.$$

5. Montrer que la série suivante diverge

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)$$

Exercice 12 – Étude abstraite d'une série (*).** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e^{-u_n} u_n.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n$ en fonction de u_n .
5. En déduire la nature de la série $\sum u_k$.