TD 06 – SUITES

Exercice 1 – Calcul des termes d'une suite. Dans chaque cas, donner les quatre premiers termes des suites suivantes.

1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n+1}{2n+1}.$$
2. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$v_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n + 2^n.$$
3. On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$w_0 = 1, \quad w_1 = -2 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = 2w_n - w_{n+1}.$$

Exercice 2 – Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par
$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = |u_n^2 - 2| \end{cases}$$

On pourra commencer par calculer les quatre premiers termes de la suite pour comprendre ce qu'il se passe.

Exercice 3 – Monotonie d'une suite. Étudier le sens de variation des suites de termes généraux suivants, définis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1) $u_n = 5 - 3^n$ *(Méthode 1)*

2) $u_n = n - n^2$ *(Méthode 1)*

3) $u_n = \frac{n-1}{n+2}$ *(Méthode 1)*

4) $u_n = \frac{2^n}{n}$ *(Méthode 2)*

5) $u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}}$ *(Méthode 2)*

6) $u_n = \prod_{k=0}^{n}(1+3^k)$ *(Méthode 2)*

7) $u_n = e^{-n} - 1$ *(Méthode 3)*

Exercice 4 – Suites bornées. Montrer que les suites de termes généraux suivants, définis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, sont bornées.
$$u_n = \frac{1}{2n}, \qquad v_n = (-1)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right), \qquad w_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$$

Exercice 5 – Suites arithmétiques. Pour chacune des suites, déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

1) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{5} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2} \end{cases}$

Exercice 6 – Suites géométriques. Pour chacune des suites, déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

1) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = 7u_n \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = -3u_n \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \frac{1}{11}u_n \end{cases}$

Exercice 7 – Suites arithmético-géométriques. Pour chacune des suites, déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

1) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = 4u_n - 6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{4} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2} \end{cases}$

Exercice 8 – Suites récurrences linéaires d'ordre 2. Pour chacune des suites, déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

1) $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 9 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \end{cases}$

Exercices approfondis

Exercice 9 – On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

1. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Préciser sa valeur.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3. Déterminer les termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10 – Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 11 – On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 12$ et

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $w_n = v_n - u_n$ est géométrique.
2. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 12 –

1. Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$, on a $2\sqrt{ab} \leqslant a + b$.
2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par $u_0 = 1 \in \mathbb{R}$, $v_0 = 2 \in \mathbb{R}$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

   (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont bien définis, strictement positifs et que $u_n \leqslant v_n$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice 13 –

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} + \dfrac{1}{u_n}$.
   Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant u_n \leqslant 3^n - 1$.

2. Soit $a_n = (1+2\sqrt{2})^n + (1-2\sqrt{2})^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} - 7a_n = 2a_{n+1}$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est un entier naturel.

Exercice 14 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n(1-u_n)$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
2. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.