TD 18 – Séries numériques

Exercice 1 – Étude à la main d'une série (★★☆). On considère la série $\sum u_k$, où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \frac{1}{e^{-k}+e^k}$.

1. Déterminer la monotonie de la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_k \leqslant e^{-k}$.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un encadrement de S_n.
4. En déduire que la série $\sum u_k$ est convergente. On note S sa somme.
5. Montrer que
$$S \leqslant \frac{e}{e-1}.$$

Correction.

1. La série étant à termes positifs (car, pour tout $k \in \mathbb{N}, u_k \geqslant 0$) donc on sait que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On peut re-démontrer ce résultat de la manière suivante.
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_n \geqslant 0.$$
Donc, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a, en utilisant la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$,
$$e^{-k} \geqslant 0 \qquad \text{donc} \qquad e^k + e^{-k} \geqslant e^k \qquad \text{donc} \qquad \frac{1}{e^k+e^{-k}} \leqslant \frac{1}{e^k} \qquad \text{donc} \qquad u_k \leqslant e^{-k}$$
De, plus, $e^k + e^{-k} \geqslant 0$ donc $u_k \geqslant 0$. Finalement, on a bien montré que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant u_k \leqslant e^{-k}$$
3. D'après la question précédente, on a
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant u_k \leqslant e^{-k}$$
Donc, en sommant ces inégalités, on obtient
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} e^{-k}$$
Or, la somme de droite est une somme géométrique, donc on peut la calculer de manière explicite comme suit,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} e^{-k} = \sum_{k=0}^{n} (e^{-1})^k = \frac{1-e^{-(n+1)}}{1-e^{-1}}$$
Donc,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant S_n \leqslant \frac{1-e^{-(n+1)}}{1-e^{-1}} \leqslant \frac{1}{1-e^{-1}}$$
Donc, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie, que l'on note S, c'est-à-dire que la série $\sum u_k$ converge et sa somme est donnée par S.
4. Comme la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S et comme $-1 < e^{-1} < 1$,
$$\frac{1-e^{-(n+1)}}{1-e^{-1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} = \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1}.$$
en passant à la limite dans l'inégalité
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant S_n \leqslant \frac{1-e^{-(n+1)}}{1-e^{-1}}$$
on obtient
$$0 \leqslant S \leqslant \frac{e}{e-1}.$$

■

Exercice 2 – Série télescopique (★ ☆ ☆). Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$. Peut-on conclure sur la nature de la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} u_k$?
2. Pour tout $n \geqslant 2$, transformer l'expression de u_n pour faire apparaître un télescopage.
3. En déduire que la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} u_k$ est divergente.

Correction.

1. On a
$$\forall n \in\geqslant 2, \qquad u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$$
On ne peut rien conclure sur la convergence de la série !
2. On a
$$\forall n \geqslant 2, \qquad u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \ln(n-1) - \ln(n).$$
3. On peut expliciter la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ grâce à un télescopage de la manière suivante,
$$\forall n \geqslant 2, \qquad S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=2}^{n} (\ln(k-1) - \ln(k)) = \ln(1) - \ln(n) = -\ln(n).$$
Donc, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, c'est-à-dire, la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} u_k$ est divergente.

■

Exercice 3 – Série télescopique (★ ☆ ☆). Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$.

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$. Peut-on conclure sur la nature de la série $\sum_{k\geqslant 2} u_k$?
2. Pour tout $n \geqslant 3$, transformer l'expression de u_n pour faire apparaître un télescopage.
3. En déduire que la série $\sum_{k\geqslant 3} u_k$ est convergente et calculer la somme de cette série.

Correction.

1. On a
$$\forall n \in\geqslant 2, \qquad u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\ln(n)\ln(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
On ne peut rien conclure sur la convergence de la série !
2. On a
$$\forall n \geqslant 3, \qquad u_n = u_n = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)} = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)} = \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\ln(n)\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n+1)}$$
3. On peut expliciter la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ grâce à un télescopage de la manière suivante,
$$\forall n \geqslant 3, \qquad S_n = \sum_{k=3}^{n} u_k = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\ln(k)} - \frac{1}{\ln(k+1)}\right) = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n+1)}$$
Donc, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie donnée par $\frac{1}{\ln(2)}$, c'est-à-dire, la série $\sum_{k\geqslant 3} u_k$ converge et sa somme est donnée par
$$\sum_{k=3}^{+\infty} u_k = \frac{1}{\ln(2)}$$

■

Exercice 4 – Série télescopique (★ ★ ☆). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$
2. Pour tout $n \geqslant 1$, déterminer l'expression de S_n, la somme partielle d'ordre n, en fonction n en utilisant des télescopages.
3. En déduire que la série $\sum_{k \geqslant 1} u_k$ est convergente et calculer la somme de cette série.

Correction.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En mettant les fractions au même dénominateur, on a
$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} = \frac{a(n+1)(n+2) + bn(n+2) + cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(a+b+c)n^2 + (3a+2b+c)n + 2a}{n(n+1)(n+2)}$$
Ainsi, par identification de polynôme, l'égalité
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$
est vérifiée si et seulement si
$$(S) \quad \begin{cases} a+b+c = 0 \\ 3a+2b+c = 0 \\ 2a = 1 \end{cases}$$
En résolvant ce système linéaire, on obtient
$$a = \frac{1}{2}, \qquad b = -1, \qquad c = \frac{1}{2}.$$
Et donc, finalement,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+2}.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'égalité de la question précédente, on obtient
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)} \end{aligned}$$
3. En utilisant le calcul de la question précédente, on obtient que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie donnée par $\frac{1}{4}$, c'est-à-dire la série $\sum u_k$ converge et sa somme est donnée par
$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{4}$$

■

Exercice 5 – Convergence et Somme (⋆ ☆ ☆). Déterminer la nature des séries suivantes et en cas de convergence, donner la somme de la série.

1. $\sum_{k\in\mathbb{N}} (-2)^k$
2. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{3^k}$
3. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!}$
4. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{2^{k+1}}{5^k}$
5. $\sum_{k\in\mathbb{N}} k$
6. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{k-1}}{3^{k+1}}$
7. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-2)^k}{k!}$
8. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-3)^{k-1}}{k!}$
9. $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{k}{3^{k-1}}$
10. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k}{(-2)^k}$
11. $\sum_{k\geqslant 2} \frac{k(k-1)2^{k-2}}{3^{k-2}}$
12. $\sum_{k\geqslant 2} \frac{k(k-1)2^k}{5^{k-1}}$
13. $\sum_{k\geqslant 0} \frac{k+3}{4^k}$
14. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+2}k}{3^k}$
15. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k+1}{3^{k+1}}$

Correction.

	Série	Convergence	Somme
1	$\sum_{k\in\mathbb{N}} (-2)^k$	Divergence grossière	
2	$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{3^k}$	Convergence (série géométrique avec $q=\frac{1}{3}$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{3}{2}$
3	$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!}$	Convergence (série exponentielle avec $x=1$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$
4	$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{2^{k+1}}{5^k}$	Convergence (série géométrique avec $q=\frac{2}{5}$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{k+1}}{5^k} = \frac{10}{3}$
5	$\sum_{k\in\mathbb{N}} k$	Divergence grossière	
6	$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{k-1}}{3^{k+1}}$	Convergence (série géométrique avec $q=-\frac{1}{3}$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{3^{k+1}} = -\frac{1}{4}$
7	$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-2)^k}{k!}$	Convergence (série exponentielle avec $x=-2$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-2)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-2}$
8	$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-3)^{k-1}}{k!}$	Convergence (série exponentielle avec $x=-3$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-3)^{k-1}}{k!} = -\frac{1}{3}\times \mathrm{e}^{-3}$
9	$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{k}{3^{k-1}}$	Convergence (série géométrique dérivée ordre 1 avec $q=\frac{1}{3}$)	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{3^{k-1}} = \frac{9}{4}$
10	$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k}{(-2)^k}$	Convergence (série géométrique dérivée ordre 1 avec $q=-\frac{1}{2}$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{(-2)^k} = -\frac{2}{9}$
11	$\sum_{k\geqslant 2} \frac{k(k-1)2^{k-2}}{3^{k-2}}$	Convergence (série géométrique dérivée ordre 2 avec $q=\frac{2}{3}$)	$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)2^{k-2}}{3^{k-2}} = 54$
12	$\sum_{k\geqslant 2} \frac{k(k-1)2^k}{5^{k-1}}$	Convergence (série géométrique dérivée ordre 2 avec $q=\frac{2}{5}$)	$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)2^k}{5^{k-1}} = \frac{200}{27}$
13	$\sum_{k\geqslant 0} \frac{k+3}{4^k}$	Convergence (somme de deux séries géométriques)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+3}{4^k} = \frac{40}{9}$
14	$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+2}k}{3^k}$	Convergence (série géométrique dérivée ordre 1 avec $q=-\frac{1}{3}$)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+2}k}{3^k} = -\frac{3}{16}$
15	$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k+1}{3^{k+1}}$	Convergence (somme de deux séries géométriques)	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{3}{4}$

■

Exercice 6 – Convergence et Somme (★★☆). Déterminer la nature des séries suivantes et en cas de convergence, donner la somme de la série.

1. $\sum_{k\geqslant m} q^k,\ q\in]-1,1[,\ m\in\mathbb{N}$
2. $\sum_{k\in\mathbb{N}} q^{2k},\ q\in]-1,1[$
3. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k2^k}{k!}$
4. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k^2}{3^k}$
5. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k+1}{k!}$
6. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{2^k}{(k+1)!}$
7. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k(k+1)}{(k+1)!}$
8. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k^2 2^k}{k!}$
9. $\sum_{k\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

Correction.

1. La série
$$\sum_{k\geqslant m} q^k$$
est une série géométrique tronquée, convergente car $q\in]-1,1[$ (la nature d'une série ne dépend pas de ces premiers termes) dont la somme est donnée par
$$\sum_{k=m}^{+\infty} q^k = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k - \sum_{k=0}^{m-1} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^m}{1-q} = \frac{q^m}{1-q}.$$

2. Remarquons que
$$\forall k\in\ \mathbb{N},\qquad q^{2k} = (q^2)^k.$$
Donc la série
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} q^{2k}$$
est une série géométrique convergente car $q^2\in]-1,1[$ (car $q\in]-1,1[$) dont la somme est donnée par
$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k} = \frac{1}{1-q^2}$$

3. On ne reconnaît pas une série usuelle, repartons aux sommes partielles. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a, en simplifiant, puis en effectuant le changement d'indice $k'=k-1$,
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k2^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k2^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{k+1}}{k!} = 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!}$$
Or, la série $\sum \frac{2^k}{k!}$ converge (série exponentielle de paramètre 2). Donc la série $\sum \frac{k2^k}{k!}$ converge et sa somme est donnée par
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k2^k}{k!} = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} = 2\mathrm{e}^2.$$

4. On remarque que,
$$\forall k\in\mathbb{N},\qquad \frac{k^2}{3^k} = \frac{k(k-1)+k}{3^k} = \frac{1}{9}\times k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{1}{3}\times k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$
Or les séries
$$\sum k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \qquad \text{et} \qquad \sum k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$
convergent car ce sont des séries géométriques (dérivée d'ordre 1 pour la seconde) de paramètre $\frac{1}{3}\in]-1,1[$. Par conséquent, la série
$$\sum \frac{k^2}{3^k}$$
converge par combinaison linéaire de séries convergentes. Et sa somme est donnée par
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{3^k} = \frac{k(k-1)+k}{3^k} = \frac{1}{9}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{3}{2}.$$

5. On reconnaît pas une série usuelle, repartons aux sommes partielles. Soit $n \in \mathbb{N}$, par linéarité et en effectuant le changement d'indice $k' = k-1$ dans la première somme, on obtient,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Or la série

$$\sum \frac{1}{k!}$$

est convergente (série exponentielle). Donc la série

$$\sum \frac{k+1}{k!}$$

est convergente et sa somme est donnée par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 2\mathrm{e}.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. En effectuant un changement d'indice, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^{k-1}}{k!} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k!}.$$

Or la série

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{2^k}{k!}$$

est une série exponentielle (tronquée) donc convergente. Donc la série

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2^k}{(k+1)!}$$

converge également et sa somme est donnée par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(k+1)!} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} - 1 \right) = \frac{1}{2} (\mathrm{e}^2 - 1)$$

■

Exercice 7 – Comparaison pour les séries à termes positifs. Déterminer la nature des séries suivantes

1. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 3}\frac{1}{k^2\ln(k)}$ 2. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 3}\frac{\ln(k)}{k}$ 3. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(2k+1)^2}$

Correction.

1. Pour tout $k\geqslant 3$, $k\geqslant \mathrm{e}$ et donc par croissance de la fonction logarithme sur $]0,+\infty[$, $\ln(k)\geqslant 1$. Donc par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$, on obtient
$$\forall k\geqslant 3,\qquad 0\leqslant \frac{1}{k^2\ln(k)}\leqslant\frac{1}{k^2}.$$
Or, la série
$$\sum\frac{1}{k^2}$$
converge car $2>1$ (série de Riemann). Donc, par comparaison pour les séries à termes positifs, la série
$$\sum\frac{1}{k^2\ln(k)}$$
converge.
2. En utilisant de nouveau le fait que pour tout $k\geqslant 3$, $\ln(k)\geqslant 1$, on obtient
$$\forall k\geqslant 3,\qquad 0\leqslant\frac{1}{k}\leqslant\frac{\ln(k)}{k}$$
Or, la série
$$\sum\frac{1}{k}$$
diverge car $1\leqslant 1$ (série de Riemann). Donc, par comparaison pour les séries à termes positifs, la série
$$\sum\frac{\ln(k)}{k}$$
diverge.
3. En développant, on a
$$\forall k\geqslant 0,\qquad (2k+1)^2=4k^2+4k+1\geqslant 4k^2.$$
Donc par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$, on obtient
$$\forall k\geqslant 0,\qquad 0\leqslant\frac{1}{(2k+1)^2}\leqslant\frac{1}{4k^2}.$$
Or, la série
$$\sum\frac{1}{k^2}$$
converge car $2>1$ (série de Riemann). Donc, par comparaison pour les séries à termes positifs, la série
$$\sum\frac{1}{(2k+1)^2}$$

■

Exercice 8 – Convergence absolue. Déterminer la nature des séries suivantes

1. $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k+1}}{k\sqrt{k}}$
2. $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^k \mathrm{e}^{-k}}{k^2}$

Correction.

1. On a :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k\sqrt{k}}\right| = \frac{1}{k\sqrt{k}} = \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}.$$
Or la série
$$\sum \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$$
converge car $\frac{3}{2} > 1$ (série de Riemann). Donc la série
$$\sum \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k\sqrt{k}}\right|$$
converge, c'est-à-dire la série
$$\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k\sqrt{k}}$$
converge absolument donc converge.
2. On a :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|\frac{(-1)^k \mathrm{e}^{-k}}{k^2}\right| = \frac{\mathrm{e}^{-k}}{k^2} \leqslant \frac{1}{k^2}$$
car, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{e}^{-k} \leqslant 1$ par décroissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. Or la série
$$\sum \frac{1}{k^2}$$
converge car $2 > 1$ (série de Riemann). Donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série
$$\sum \frac{(-1)^k \mathrm{e}^{-k}}{k^2}$$
converge absolument donc converge.

■