Interrogation du 03/03/2025

NOM Prénom :

1. Dans le texte à trous suivant, compléter les trous en utilisant la notation adéquate parmi les trois suivantes :

$$1.\ \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \qquad 2.\ \sum_{k=0}^{n} u_k \qquad 3.\ \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

« On considère la ***série*** $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ *de terme général* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$*. Sa* ***suite des sommes partielles*** *est donnée par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Lorsque cette série converge, la ***somme*** *de cette série est notée*

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \quad »$$

2. Déterminer si les deux séries suivantes convergent et en cas de convergence, donner leur somme.

$$\text{a. } \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2}\right)^k \qquad \text{b. } \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{5^k}{k!}$$

- La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ est une série géométrique qui converge car $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ et dont la somme vaut :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \boxed{2}$$

- La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{5^k}{k!}$ est une série exponentielle donc convergente et dont la somme vaut :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5^k}{k!} = e^5}$$

Tournez la page ➔

3. Montrer que la série
$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
converge et donner sa somme. *On commencera par expliciter sa suite des sommes partielles.*

La suite des sommes partielles est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \text{par télescopage.}$$

Donc la suite des sommes partielles converge vers 1 car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Cela signifie que la série $\boxed{\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \text{ converge}}$ et que sa somme vaut

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1}$$