DS 4

Exercice 1 – Questions de cours. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier les quantités suivantes au maximum.

$$\text{a. } \frac{(n+1)!}{n!} \qquad \text{b. } \frac{(2n+1)!}{(2n)!} \qquad \text{c. } \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{1}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. On remarque que

$$\boxed{\frac{(n+1)!}{n!}} = \frac{\cancel{1} \times \cancel{2} \times \cdots \times \cancel{n} \times n+1}{\cancel{1} \times \cancel{2} \times \cdots \times \cancel{n}} \boxed{= n+1}$$

b. De la même manière, on remarque que

$$\boxed{\frac{2n!}{(2n+1)!}} = \frac{\cancel{1} \times \cancel{2} \times \cdots \times \cancel{2n}}{\cancel{1} \times \cancel{2} \times \cdots \times \cancel{2n} \times (2n+1)} \boxed{= \frac{1}{2n+1}}$$

c. Tout d'abord, en simplifiant comme aux questions précédentes, on peut remarquer que

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

et que

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{1}}} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n} \boxed{= \frac{n-1}{2}}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer les quantités suivantes.

$$\text{a. } (x+2)^4 \qquad \text{b. } (x^2+1)^5$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la **formule du binôme de Newton**, on obtient,

$$\boxed{(x+2)^4} = 1 \times x^4 \times 2^0 + 4 \times x^3 \times 2^1 + 6 \times x^2 \times 2^2 + 4 \times x^1 \times 2^3 + 1 \times x^0 \times 2^4$$
$$\boxed{= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16}$$

De même, on obtient que,

$$\boxed{(x^2+1)^5 = x^{10} + 5x^8 + 10x^6 + 10x^4 + 5x^2 + 1}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k}$ b. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$ c. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

On rappelle que la **formule du binôme Newton** donne,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En particulier, on obtient donc les résultats suivants :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k}} = (2+3)^n \boxed{= 5^n}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \times 1^{n-k} = (-1+1)^n \boxed{= 0}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 1^k \times 1^{n-k} = (1+1)^n \boxed{= 2^n}$$

4. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ \exp(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

On étudie la continuité de la fonction sur $]-\infty, 0[$, $]0, +\infty[$ et en 0.

- Sur $]-\infty, 0[$, la fonction f coïncide avec la fonction $x \mapsto x+1$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) donc à fortiori sur $]-\infty, 0[$.
- Sur $]0, +\infty[$, la fonction f coïncide avec la fonction $x \mapsto \exp(x)$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction usuelle) donc à fortiori sur $]0, +\infty[$.
- En 0, on peut remarquer que $f(0) = 1$ et

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \exp(x) = \exp(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x+1 = 0+1 = 1$$

Donc

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

Donc la fonction est aussi continue en 0.

Finalement, la fonction est continue sur $]-\infty, 0[$, $]0, +\infty[$ et en 0 donc la fonction f est $\boxed{\text{continue sur } \mathbb{R}}$.

5. On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - 3x - 3 \end{array}$$

Montrer que f s'annule au moins une fois sur $[0,3]$.

- *Première façon de rédiger.* La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) donc à fortiori sur $[0,3]$. De plus, $f(0) = -3$ et $f(3) = 15$. Donc, par le **théorème des valeurs intermédiaires**,

$$\forall y \in [-3,15], \exists x \in [0,3], y = f(x)$$

En particulier, pour $y = 0 \in [-3,15]$, on obtient que

$$\exists x \in [0,3], 0 = f(x)$$

c'est-à-dire la fonction $\boxed{f \text{ s'annule au moins une fois sur } [0,3]}$.

- *Deuxième façon de rédiger.* La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) donc à fortiori sur $[0,3]$. De plus, $f(0) = -3$ et $f(3) = 15$ et donc $f(0)f(3) < 0$. Donc, par le **théorème des valeurs intermédiaires**, la fonction $\boxed{f \text{ s'annule au moins une fois sur } [0,3]}$.

6. On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x - 1 \end{array}$$

(a) Dresser le tableau de variations de f.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

On peut donc en déduire le tableau de signe de f' et donc le tableau de variations de f de la manière suivante.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-e^{-1}-1$	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers un intervalle J à déterminer.

On a :
- On travaille sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc à fortiori sur $[0,+\infty[$.
- D'après la question précédente, la fonction f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

- (On peut calculer que $f(0) = -1$ et que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$).

Donc, d'après le **théorème de la bijection**,

$$\text{la fonction } f \text{ réalise une } \boxed{\text{bijection de } [0, +\infty[\text{ vers } [-1, +\infty[}.$$

(c) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0, +\infty[$.

D'après la question précédente, la fonction f réalise une **bijection** de $[0, +\infty[$ vers $[-1, +\infty[$, c'est-à-dire

$$\forall y \in [-1, +\infty[, \quad \exists! x \in [0, +\infty[, \quad y = f(x)$$

En particulier, en prenant $y = 0 \in [-1, +\infty[$, on obtient que

$$\boxed{\exists! x \in [0, +\infty[, \quad 0 = f(x)}$$

c'est-à-dire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0, +\infty[$.

7. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\exp(-u_n)}{u_n}$$

(a) Écrire une fonction, appelée `suite`, qui prend en argument un entier naturel `n` et qui renvoie u_n.

```python
import numpy as np

def suite(n):
    u = 1
    for k in range(1, n+1):
        u = np.exp(-u)/u
    return(u)
```

(b) Écrire une fonction, appelée `listesuite`, qui prend en argument un entier naturel `n` et qui renvoie la liste de tous les termes de u_0 à u_n.

```python
import numpy as np

def listesuite(n):
    L = []
    u = 1
    L.append(u)
    for k in range(1, n+1):
        u = np.exp(-u)/u
        L.append(u)
    return(L)
```

(c) Écrire un programme Python qui renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 10^6$.

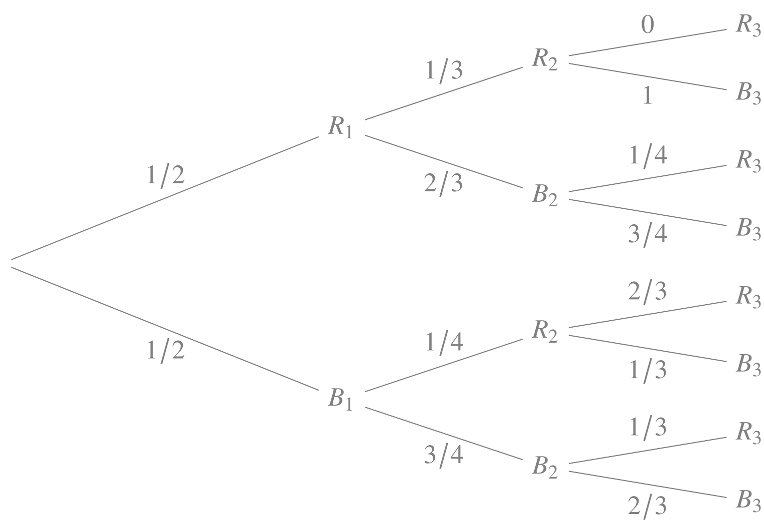
```python
import numpy as np

n = 0
u = 1
while u <= 10**6 :
    u = np.exp(-u)/u
    n = n+1
print(n)
```

Exercice 2 – Exercice type concours. On considère deux urnes :

1. une urne rouge, U_R, composée de deux balles rouges et deux balles bleues,
2. une urne bleue, U_B, composée d'une balle rouge et trois balles bleues.

On effectue trois tirages successifs et **sans remise** selon le protocole suivant : le premier tirage s'effectue toujours dans l'urne rouge ; la boule tirée est retirée de l'urne, puis, le tirage suivant s'effectue dans l'urne de la couleur de la balle obtenue au tirage précédent, et ainsi de suite. On suppose qu'il y a équiprobabilité du choix des différentes balles. On note pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, R_k l'évènement «Obtenir une boule rouge au k-ième tirage» et B_k l'évènement «Obtenir une boule bleue au k-ième tirage».

1. Représenter cette situation sur un arbre de probabilité.



2. Justifier que $\mathbb{P}_{R_1}(R_2) = \frac{1}{3}$.

   Si l'évènement R_1 a lieu, cela signifie que la première boule tirée est rouge : on la retire donc de l'urne rouge U_R et on effectue le deuxième tirage dans l'urne rouge encore. Dedans, il reste donc une balle rouge et deux balles bleues, la probabilité d'avoir une boule rouge au deuxième tirage dans ce cas est donné par $1/3$ (car le tirage est **uniforme**), ce qui explique que

   $$\boxed{\mathbb{P}_{R_1}(R_2) = \frac{1}{3}}$$

3. Déterminer de même $\mathbb{P}_{B_1}(R_2)$.

   Si l'évènement B_1 a lieu, cela signifie que la première boule tirée est bleue : on la retire donc de l'urne rouge U_R et on effectue le deuxième tirage dans l'urne bleue cette fois. Dedans, il y a la balle rouge et les trois balles bleues de départ, la probabilité d'avoir une boule rouge au deuxième tirage dans ce cas est donné par $1/4$ (car le tirage est **uniforme**), ce qui explique que

   $$\boxed{\mathbb{P}_{B_1}(R_2) = \frac{1}{4}}$$

4. Déterminer $\mathbb{P}(R_2)$.

   Les évènements (R_1, B_1) forment un système complet d'évènements donc d'après la **formule des probabilités totales**, on a

$$\begin{aligned}\boxed{\mathbb{P}(R_2)} &= \mathbb{P}(R_1) \times P_{R_1}(R_2) + \mathbb{P}(B_1) \times P_{B_1}(R_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \\ &\boxed{= \frac{7}{24}}\end{aligned}$$

5. Déterminer $\mathbb{P}_{R_2}(R_1)$.

   D'après la **formule de Bayes**, on a

$$\begin{aligned}\boxed{\mathbb{P}_{R_2}(R_1)} &= \frac{\mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2)}{\mathbb{P}(R_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{7}{24}} \\ &\boxed{= \frac{4}{7}}\end{aligned}$$

   en utilisant les résultats numériques des questions 2 et 4.

6. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge lors des deux premiers lancers ?

   On cherche $\mathbb{P}(R_1 \cup R_2)$. En passant à l'**évènement contraire**, on a

$$\mathbb{P}(R_1 \cup R_2) = 1 - \mathbb{P}(B_1 \cap B_2)$$

   Or en utilisant la **formule des probabilités composées**, on obtient,

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

   Donc finalement, on obtient que

$$\boxed{\mathbb{P}(R_1 \cup R_2)} = 1 - \frac{3}{8} \boxed{= \frac{5}{8}}$$

7. Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules rouges au cours des trois lancers ?

   On cherche $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$. Or si l'évènement $R_1 \cap R_2 \cap R_3$ est réalisé, cela signifie que les trois tirages se font dans l'urne rouge. Or l'urne rouge ne contient initialement que deux balles rouges, et les tirages se sont sans remise. L'évènement $R_1 \cap R_2 \cap R_3$ est donc impossible, c'est-à-dire

$$\boxed{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = 0}$$

8. Dans cette question, on note, pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, X_k l'évènement «Obtenir k boules rouges lors des trois tirages».

   (a) Déterminer $\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3)$. En déduire $\mathbb{P}(X_0)$.

      Si l'évènement $B_1 \cap B_2$ est réalisé, cela signifie que

      - Le premier tirage a eu lieu dans l'urne rouge, on a obtenu une boule bleue qu'on a retiré de cette urne.
      - Le deuxième tirage a eu lieu dans l'urne bleue, qui contient une balle rouge et trois balles bleues. On a tiré une balle bleue qu'on a enlevé de cette urne.

Le troisième tirage va donc avoir lieu dans l'urne bleue, qui ne contient plus qu'une balle rouge et deux balles bleues. Dans ce cas, comme les tirages sont **équiprobables**, la probabilité d'obtenir une balle bleue est de $2/3$, c'est-à-dire

$$\boxed{\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \frac{2}{3}}$$

De plus, on peut remarquer que

$$X_0 = B_1 \cap B_2 \cap B_3$$

Donc, en utilisant la **formule des probabilités composées**, on obtient,

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbb{P}(X_0)} &= \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \\
&\boxed{= \frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

(b) Déterminer $\mathbb{P}(X_1)$.

L'évènement X_1 correspond à l'obtention d'exactement une boule rouge parmi ces trois lancers. On a donc

$$X_1 = (R_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap R_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap R_3)$$

Or les évènements $R_1 \cap B_2 \cap B_3$, $B_1 \cap R_2 \cap B_3$ et $B_1 \cap B_2 \cap R_3$ sont deux à deux **incompatibles**, donc,

$$\mathbb{P}(X_1) = \mathbb{P}(R_1 \cap B_2 \cap B_3) + \mathbb{P}(B_1 \cap R_2 \cap B_3) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap R_3)$$

Or en utilisant la **formule des probabilités composées**, on obtient que,

$$\mathbb{P}(R_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap B_2}(B_3) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Les deux autres probabilités $\mathbb{P}(B_1 \cap R_2 \cap B_3)$ et $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap R_3)$ se calculent de même, et on obtient que

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbb{P}(X_1)} &= \mathbb{P}(R_1 \cap B_2 \cap B_3) + \mathbb{P}(B_1 \cap R_2 \cap B_3) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap R_3) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{+} \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \\
&\boxed{= \frac{5}{12}}
\end{aligned}$$

(c) Vérifier que

$$\mathbb{P}(X_2) = \frac{1}{3}.$$

La famille (X_0, X_1, X_2) forme un **système complet d'évènement**, donc

$$\mathbb{P}(X_0) + \mathbb{P}(X_1) + \mathbb{P}(X_2) = 1$$

À l'aide des valeurs des deux questions précédentes, on en déduit que

$$\boxed{\mathbb{P}(X_2)} = 1 - \mathbb{P}(X_0) - \mathbb{P}(X_1) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{5}{12} \boxed{= \frac{1}{3}}$$

(d) Calculer la somme suivante :

$$\sum_{k=0}^{2} k \cdot \mathbb{P}(X_k).$$

Grâce aux réponses des questions précédentes, on obtient directement que

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{k=0}^{2} k \times \mathbb{P}(X_k)} &= 0 \times \mathbb{P}(X_0) + 1 \times \mathbb{P}(X_1) + 2 \times \mathbb{P}(X_2) \\
&= \frac{5}{12} + \frac{2}{3} \\
&\boxed{= \frac{13}{12}}
\end{aligned}$$

Exercice 3 – On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

PARTIE A. On cherche à déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M^n.

1. Calculer M^2. En déduire la valeur de deux coefficients réels α et β tels que

$$M^2 = \alpha M + \beta I_4.$$

En effectuant le produit matriciel, on obtient que

$$\boxed{M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}}$$

On remarque alors que

$$\boxed{M^2 = 2M + 3I_4.}$$

2. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} a_{n+1} = 3b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n. \end{cases}$$

Montrer par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

Montrons **par récurrence** que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \text{la propriété } \mathcal{P}(n) : \text{« } M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & b_n & a_n \end{pmatrix} \text{ »} \qquad \text{est vraie}$$

- Initialisation. Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. D'une part, par convention, $M^0 = I_4$. D'autre part, d'après l'énoncé, $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, donc,

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & b_0 & b_0 \\ b_0 & a_0 & b_0 & b_0 \\ b_0 & b_0 & a_0 & b_0 \\ b_0 & b_0 & b_0 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- <u>Hérédité</u>. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire, on suppose que

$$M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

Montrons que c'est-à-dire montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$M^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & b_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & a_{n+1} & b_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & b_{n+1} & a_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & b_{n+1} & b_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M \\ &= \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & b_n & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} && \text{grâce à l'H-R et l'énoncé} \\ &= \begin{pmatrix} 3b_n & a_n+2b_n & a_n+2b_n & a_n+2b_n \\ a_n+2b_n & 3b_n & a_n+2b_n & a_n+2b_n \\ a_n+2b_n & a_n+2b_n & 3b_n & a_n+2b_n \\ a_n+2b_n & a_n+2b_n & a_n+2b_n & 3b_n \end{pmatrix} && \text{en effectuant le produit matriciel} \\ &= \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & b_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & a_{n+1} & b_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & b_{n+1} & a_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & b_{n+1} & b_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix} && \text{d'après l'énoncé} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- <u>Conclusion</u>. Par principe de récurrence, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}}$$

3. (a) Que valent b_0 et b_1 ?

D'après l'**énoncé**, $\boxed{b_0 = 0}$. Puis en utilisant la **relation de récurrence** de l'énoncé, on a

$$\boxed{b_1} = a_0 + 2b_0 = 1 + 2 \times 0 \boxed{= 1}$$

(b) Démontrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_{n+2} = 2b_{n+1} + 3b_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant les deux **relations de récurrence** liant les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient,

$$\begin{aligned} \boxed{b_{n+2}} &= a_{n+1} + 2b_{n+1} \\ &\boxed{= 3b_n + 2b_{n+1}} \end{aligned}$$

(c) En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \frac{3^n - (-1)^n}{4}$$

D'après la question 3b, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite récurrente linéaire d'ordre 2**. Pour déterminer son terme général, on commence par étudier son équation caractéristique donnée par

$$r^2 = 2r + 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad r^2 - 2r - 3 = 0$$

C'est une équation du second degré. On commence donc par calculer son discriminant qui vaut

$$\Delta = 16.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux solutions réelles données par

$$r_1 = -1 \qquad \text{et} \qquad r_2 = 3$$

On en déduit alors que le terme général de la suite est donnée par,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = Ar_1^n + Br_2^n = A \times (-1)^n + B \times 3^n$$

où A et B sont deux constantes à déterminer grâce aux deux premiers termes de la suite de la manière suivante.

$$\left\{\begin{array}{rcl} A+B &=& 0 \\ -A+3B &=& 1 \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcl} A &=& -\frac{1}{4} \\ B &=& \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Ainsi, on obtient donc que,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = -\tfrac{1}{4} \times (-1)^n + \tfrac{1}{4} \times 3^n = \tfrac{3^n - (-1)^n}{4}}$$

4. En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \frac{3^n + 3(-1)^n}{4}$$

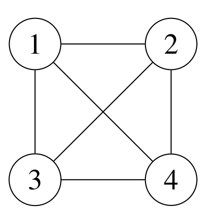
D'après l'énoncé (en «décalant» la relation),

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = 3b_{n-1}$$

Donc, en utilisant le résultat de la question 3c, on obtient que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n} = 3 \times \frac{3^{n-1} - (-1)^{n-1}}{4} = \frac{3^n - 3(-1)^{n-1}}{4} = \boxed{\tfrac{3^n + 3(-1)^n}{4}}$$

PARTIE B. On considère le graphe non orienté suivant.



5. Donner la matrice d'adjacence du graphe.

La matrice d'adjacence du graphe est donné par

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

On reconnaît la matrice du début de l'exercice 3.

6. Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant le sommet 1 au sommet 3.

Le nombre de chaînes de longueur 3 reliant le sommet 1 au sommet 3 est donné par le **coefficient à la ligne 1 et la colonne 3 (ou la ligne 3 et la colonne 1) de la matrice** M^3. Or d'après la question 2,

$$M^3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & b_3 & b_3 \\ b_3 & a_3 & b_3 & b_3 \\ b_3 & b_3 & a_3 & b_3 \\ b_3 & b_3 & b_3 & a_3 \end{pmatrix}$$

Or, en utilisant les questions 3c et 4, on obtient

$$a_3 = 6 \qquad \text{et} \qquad b_3 = 7$$

Donc,

$$M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & \boxed{7} & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Donc, il existe $\boxed{\text{sept chaînes de longueur 3 reliant le sommet 1 au sommet 3}}$.

7. Compléter et recopier le programme Python suivant pour qu'il donne le nombre de chaînes de longueur 5 reliant les sommets 2 et 3.

Le nombre de chaînes de longueur 5 reliant le sommet 2 au sommet 3 est donné par le coefficient à la ligne 2 et la colonne 3 (ou la ligne 3 et la colonne 2) de la matrice M^5. Cependant, les lignes et les colonnes d'une matrice en Python sont numérotées à partir de 0, donc avec cette convention, il faut récupérer le coefficient en position $(1,2)$ de la matrice M^5.

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as al

M = np.array([[0,1,1,1],[1,0,1,1],[1,1,0,1],[1,1,1,0]])
puissanceM = al.matrix_power(M, 5)
nombrechaines = puissanceM[1 , 2]
print(nombrechaines)
```

8. Le graphe est-il connexe ?

Le chemin 1-4-3-2 passe par tous les sommets du graphe donc nécessairement, deux sommets (distincts) peuvent être réliés par un chemin. Donc le graphe est $\boxed{\text{connexe}}$. On pourrait aussi calculer la matrice

$$I_4 + M + M^2 + M^3$$

et remarquer que tous ses coefficients sont strictement positifs, ce qui démontre d'une façon différente la connexité du graphe.