# 19 Dérivation d’une fonction

## Pour bien démarrer : Connaître les dérivées usuelles

| | |
|---|---|
| $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = k$ | $\forall a \in \mathbb{R},\ f'(a) = 0$ |
| $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^n$ | $\forall a \in \mathbb{R},\ f'(a) = na^{n-1}$ |
| $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{1}{x^n}$ | $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ f'(a) = -\frac{n}{a^{n+1}}$ |
| $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{1}{x}$ | $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ f'(a) = -\frac{1}{a^2}$ |
| $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x}$ | $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ |
| $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^x$ | $\forall a \in \mathbb{R},\ f'(a) = \mathrm{e}^a$ |
| $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \ln(x)$ | $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(a) = \frac{1}{a}$ |

| |
|---|
| $(u+v)' = u' + v'$ |
| $(ku)' = ku'$ pour $k \in \mathbb{R}$ |
| $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$ |
| $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ |
| $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$ |
| $(u^n)' = nu' \times u^{n-1}$ et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ et $(\exp(u))' = u' \times \exp(u)$ |

Le but de ce chapitre est de **démontrer** ces formules qui étaient jusqu'à présent admises et donc d'expliquer la construction de la notion de **dérivée**.

# 1 Étude locale de la dérivée

## 1.1 Dérivabilité en un point

**Définition 1.1** Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que la fonction $f$ est **dérivable au point** $a$ si le **taux d'accroissement** de $f$ en $a$, c'est-à-dire le nombre réel

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $a$. Si c'est le cas, on appelle **nombre dérivé de** $f$ **en** $a$ et on note $f'(a)$, la valeur de cette limite, c'est-à-dire

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

**Exemple 1.2 — Preuve de la dérivée de la fonction $x \mapsto x^2$.** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2$$

Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $f$ est dérivable au point $a$ et que

$$f'(a) = 2a.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Le taux d'accroissement de $f$ en $a$ est donné par,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq a, \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x - a} = x + a$$

Donc,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} x + a = 2a \in \mathbb{R}$$

Donc, la fonction $f$ est dérivable au point $a$ et

$$f'(a) = 2a.$$

**Exemple 1.3 — Preuve de la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.** On considère la fonction $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

Montrer que, pour tout $a > 0$, la fonction $f$ est dérivable au point $a$ et que

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

mais que la fonction $f$ n'est pas dérivable en 0.

Soit $a > 0$. Le taux d'accroissement de $f$ en $a$ est donné par,

$$\forall x \in [0, +\infty[, \ x \neq a, \qquad \begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a}) \times (\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a) \times (\sqrt{x} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{a})^2}{(x - a) \times (\sqrt{x} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{x - a}{(x - a) \times (\sqrt{x} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \in \mathbb{R}$$

Donc, la fonction $f$ est dérivable au point $a$ et

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Par contre, le taux d'accroissement de $f$ en 0 est donné par,

$$\forall x \in [0, +\infty[, \ x \neq 0, \qquad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Donc,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \notin \mathbb{R}$$

Donc, la fonction $f$ n'est pas dérivable en 0.

**Exemple 1.4** Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $f$ et $g$ sont dérivables au point $a$. Montrer que la fonction $f + g$ est dérivable au point $a$ et que

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Le taux d'accroissement de $f + g$ en $a$ est donné par,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ x \neq a, \qquad \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a} = \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

Or, les fonctions $f$ et $g$ sont dérivables au point $a$, donc

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

Donc, par somme,

$$\lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a} = f'(a) + g'(a) \in \mathbb{R}$$

Donc, la fonction $f + g$ est dérivable au point $a$ et

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

## 1.2 Dérivabilité à gauche/à droite

**Définition 1.5** Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- On dit que la fonction $f$ est **dérivable à droite** au point $a$ si le **taux d'accroissement** de $f$ en $a$ admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $a^+$. Si c'est le cas, on appelle **nombre dérivé à droite de $f$ en** $a$ et on note $f'_d(a)$, la valeur de cette limite, c'est-à-dire

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

- On dit que la fonction $f$ est **dérivable à gauche** au point $a$ si le **taux d'accroissement** de $f$ en $a$ admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $a^-$. Si c'est le cas, on appelle **nombre dérivé à gauche de $f$ en** $a$ et on note $f'_g(a)$, la valeur de cette limite, c'est-à-dire

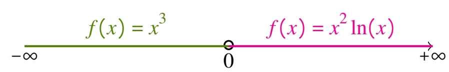
$$f'_g(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

- On dit que $f$ est **dérivable** en $a$ lorsque $f$ est dérivable à droite en $a$, $f$ est dérivable à gauche en $a$ et que $f'_d(a) = f'_g(a)$. Dans ce cas, le **nombre dérivé de $f$ en** $a$ est donné par

$$f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a).$$

**Exemple 1.6** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$




Montrer que la fonction $f$ est dérivable en 0.

**Gestes Invisibles/Automatismes.** La fonction a une expression différente sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Pour étudier la dérivabilité en 0, on étudie la dérivabilité à droite et à gauche.

- Le taux d'accroissement de $f$ en 0 à droite est donné par

$$\forall x > 0, \qquad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \ln(x) - 0}{x - 0} = x \ln(x)$$

Donc, par croissances comparées,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \in \mathbb{R}$$

Donc $f$ est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

- Le taux d'accroissement de $f$ en 0 à gauche est donné par

$$\forall x < 0, \qquad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^3 - 0}{x} = x^2$$

Donc,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \in \mathbb{R}$$

Donc $f$ est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$.

- Conclusion. La fonction est $f$ est dérivable à droite et à gauche en 0 et,

$$f'_d(0) = f'_g(0) = 0$$

donc la fonction $f$ est dérivable en 0 et

$$f'(0) = 0$$

**Exemple 1.7** Étudier la dérivabilité de la fonction valeur absolue en 0.

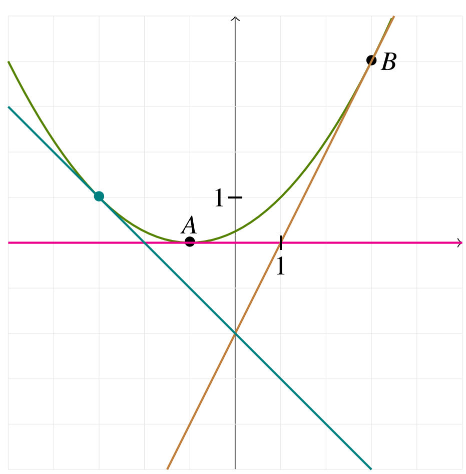
**Gestes Invisibles/Automatismes.** La fonction valeur absolue a une expression différente sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. Pour étudier la dérivabilité en 0, on étudie la dérivabilité à droite et à gauche.

- Le taux d'accroissement de $f$ en 0 à droite est donné par
$$\forall x>0, \qquad \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|-|0|}{x-0}=\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1$$
Donc
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-|0|}{x-0}=1\in\mathbb{R}$$
Donc $f$ est dérivable à droite et $f_d'(0)=1$.
- Le taux d'accroissement de $f$ en 0 à gauche est donné par
$$\forall x<0, \qquad \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|-|0|}{x-0}=\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1$$
Donc
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-|0|}{x-0}=-1\in\mathbb{R}.$$
Donc $f$ est dérivable à gauche et $f_g'(0)=-1$.
- La fonction valeur absolue est dérivable à gauche et à droite en 0 mais les dérivées à droite et à gauche en 0 ne coincident pas, la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

## 1.3 Interprétation géométrique de la dérivée en un point

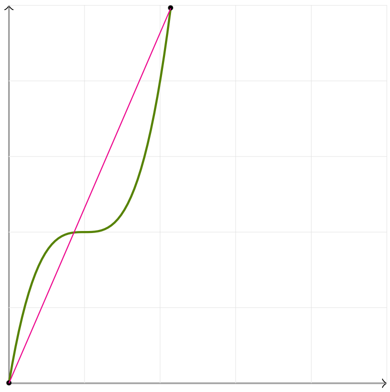
**Proposition 1.8** Soient $f: I\to\mathbb{R}$ et $a\in I$. Notons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$.
- Si $f$ est dérivable en $a$, alors la tangente au point d'abscisse $a$ à $\mathcal{C}_f$ est la droite d'équation
$$y=f'(a)(x-a)+f(a).$$
- Si le taux d'accroissement en $a$ diverge vers $\pm\infty$, c'est-à-dire si
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty,$$
alors $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse $a$, d'équation $x=a$.

**Exemple 1.9** On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $[-5,5]$. Déterminer graphiquement $f'(-1)$ et $f'(3)$.




Graphiquement, $f'(1)$ correspond au coefficient directement de la tangente au point A. Comme la tangente au point A est horizontale, son coefficient directeur est de 0 donc $f'(1)=0$. De même, on trouve que $f'(3)=2$ («quand on avance de un, on monte de deux»).

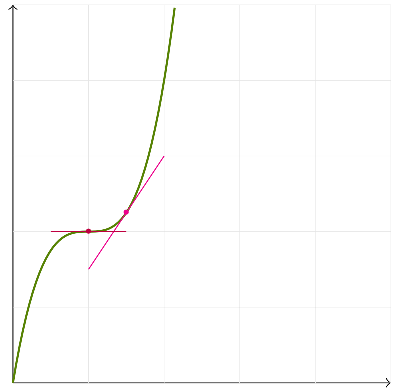
### a) Pente moyenne & pente instantanée



Le taux d'accroissement

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$. Lorsque les deux points sont «éloignés», cela correspond à «la **pente moyenne**».

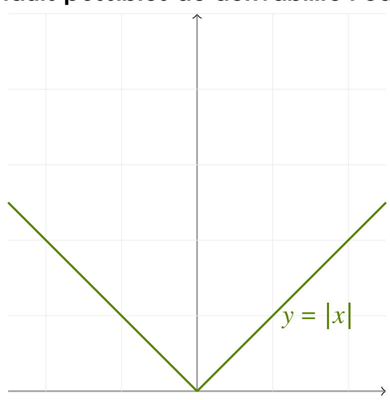


Le nombre dérivé

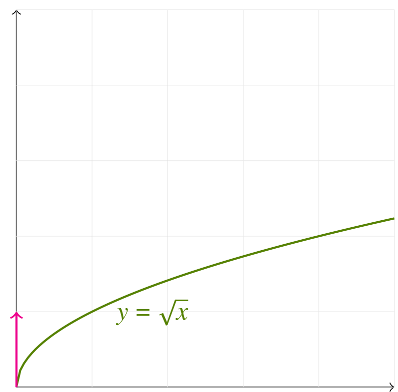
$$f'(a)$$

correspond au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $a$. Cela correspond à regarder la pente entre deux points «très proches» et donc de regarder «la **pente instantanée**».

### b) Deux défauts possibles de dérivabilité : cassure & pente infine




La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 car elle y présente une «**cassure**» : la pente à gauche de 0 est différente de la pente à droite de 0. Cela signifie que la fonction valeur absolue est dérivable à gauche et à droite de zéro mais que les dérivées à droite et à gauche ne sont pas égales.

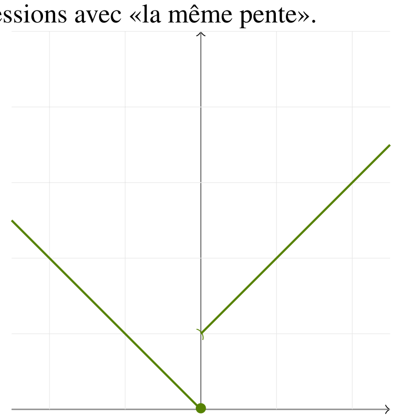



La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 car elle y présente une «**pente infine**» ou autrement dit une asymptote verticale. Cela signifie que la limite du taux d'accroissement en 0 est infinie.

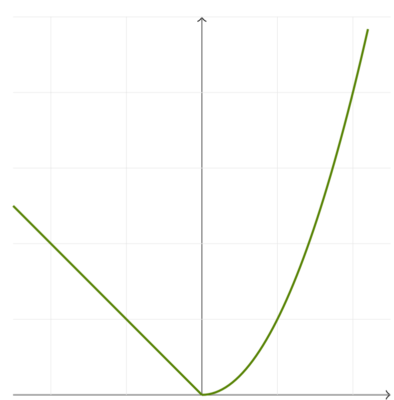
### c) Fonction définie par morceaux : problème(s) de recollements

Pour une fonction définie par morceaux, divers problèmes peuvent apparaître au(x) point(s) de jonctions.

- Pour qu'une fonction soit continue au(x) point(s) de jonctions, il suffit de pouvoir «recoller» les deux expressions.
- Pour qu'une fonction soit dérivable au(x) point(s) de jonctions, il suffit de pouvoir «recoller» les deux expressions avec «la même pente».



La fonction n'est pas continue en 0 car les «deux morceaux ne se recollent pas».



La fonction est continue en 0 mais pas dérivable en 0 car les «deux morceaux se recollent mais pas avec la même pente».

## 1.4 Développement limité à l'ordre 1

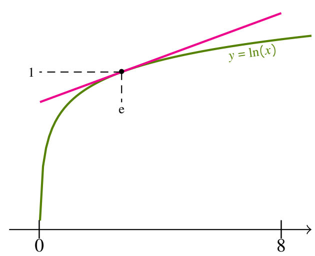
**Proposition 1.10** Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si $f$ est dérivable en $a$ alors $f$ admet un **développement limité à l'ordre 1 en a**, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $\varepsilon$ telle que, pour tout $x \in I$ «suffisamment proche de $a$», on a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x-a) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to a} \varepsilon(x-a) = 0.$$

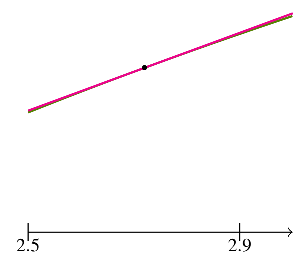
En particulier, pour $x$ «suffisamment proche de 0», on a,

$$\begin{array}{lcll} e^x & = & 1 + x + x\varepsilon(x) & \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0 \\ \ln(x+1) & = & x + x\tilde{\varepsilon}(x) & \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \tilde{\varepsilon}(x) = 0 \end{array}$$

De manière informelle, cela signifie que si on «zoome suffisamment fort» sur la courbe de la fonction autour du point $(a, f(a))$, la courbe de la fonction «ressemble beaucoup» à sa tangente au point d'abscisse $a$. On dit que localement autour d'un point, on peut confondre la courbe de la fonction et sa tangente.




Globalement, les courbes du logarithme et de sa tangente en e sont très différentes.




Mais si on «zoome suffisamment fort», la courbe du logarithme et de sa tangente en e sont quasiment confondues. De manière informelle, on peut dire que, au «voisinage de 0», on a

$$\ln(1+x) \approx x.$$

**Exemple 1.11** Calculer la limite suivante

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}.$$

**Gestes Invisibles/Automatismes.** On peut commencer par regarder ce qu'il se passe de manière informelle «autour de 0» en remplaçant les fonctions par leur développement limité :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} \approx \lim_{x\to 0} \frac{1+x-1}{x} = 1$$

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc en $a = 0$ donc il existe une fonction $\varepsilon$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ «suffisamment proche de 0», on a

$$e^x = 1 + x + x\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

De même, la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et donc en $a = 0$ donc il existe une fonction $\tilde{\varepsilon}$ telle que pour tout $x \in ]-1, +\infty[$ «suffisamment proche de 0», on a

$$\ln(1+x) = 0 + x + x\tilde{\varepsilon}(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} \tilde{\varepsilon}(x) = 0.$$

Donc, finalement, pour tout $x \in ]-1, +\infty[$ «suffisamment proche de 0», on a

$$\frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = \frac{x + x\varepsilon(x)}{x + x\tilde{\varepsilon}(x)} = \frac{1 + \varepsilon(x)}{1 + \tilde{\varepsilon}(x)}.$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = 1.$$

**Proposition 1.12** Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- Si la fonction $f$ est dérivable en $a$ alors la fonction $f$ est continue en $a$.
- La réciproque est fausse : si une fonction est continue en un point, elle n'est pas forcément dérivable en ce point.

Attention, attention et encore attention. La réciproque est fausse ! La fonction valeur absolue est continue en 0 mais pas dérivable en 0. De même, la fonction racine carrée est continue en 0 mais pas dérivable en 0. Cf. graphes de la Section 1.3. b)

# 2 Étude globale de la dérivée

## 2.1 Dérivabilité sur un intervalle

**Définition 2.1** Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est **dérivable sur** $I$ si $f$ est dérivable en tout point de $I$. On définit alors sa **fonction dérivée** par

$$f' : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

On appelle **ensemble de dérivabilité** de $f$ le plus grand ensemble sur lequel $f$ est dérivable.

**Proposition 2.2** Toute fonction dérivable sur un intervalle $I$ est continue sur cet intervalle $I$.

**Proposition 2.3 — Dérivabilité des fonctions usuelles.**

- Les fonctions constantes, $x \mapsto x^n$, exp, ln sont dérivables sur leur ensemble de définition.
- La fonction inverse est définie, continue et dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
- La fonction racine carrée est définie et continue sur $[0, +\infty[$ mais seulement dérivable sur $]0, +\infty[$.
- La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais seulement dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Le fait de connaître la dérivabilité des fonctions usuelles permet, en reconnaissant des taux d'accroissements, de résoudre l'indétermination de certaines limites.

**Exemple 2.4 — ② Calculer une limite.** (❤) Calculer les limites suivantes

$$\text{i)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \qquad \text{ii)}\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \qquad \text{iii)}\ \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$$

i) La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et en particulier en $a = 0$ donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) \qquad \text{c-à-d} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

ii) La fonction $g : x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier en $a = 0$ donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0) \qquad \text{c-à-d} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

iii) La fonction $j : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et en particulier en $a = 1$ donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{j(1+h)-g(1)}{h} = j'(1) \qquad \text{c-à-d} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \frac{1}{2}.$$

## 2.2 Opérations sur les fonctions dérivables

**Proposition 2.5** Les combinaisons linéaires, le produit, l'inverse, le quotient et la composée (s'ils sont bien définis) de fonctions dérivables sont des fonctions dérivables.

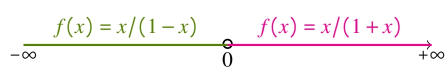
! Dès qu'on peut, on étudie directement la dérivabilité d'une fonction **par opérations** sur les fonctions usuelles qui sont dérivables. On étudie la dérivabilité **via le taux d'accroissement** seulement aux points pathologiques : lorsqu'il y a un **changement d'expression** de la fonction, ou une **racine carrée/valeur absolue** dans l'expression de la fonction.

**Exemple 2.6** Montrer que la fonction suivante est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{x}{1+|x|} \end{array}$$

**Gestes Invisibles/Automatismes.** Il y a une **valeur absolue** dans l'expression de la fonction : problème potentiel de dérivabilité en $0$ ! On peut aussi voir cette fonction comme **définie par morceaux**, il y a donc un potentiel problème à la jonction.

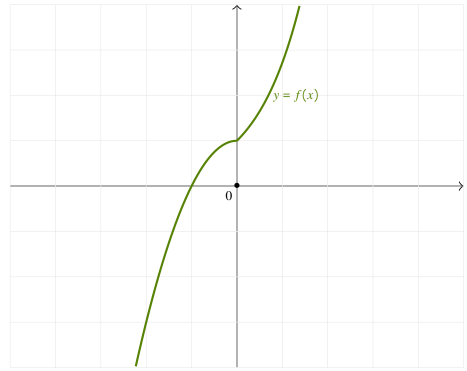
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$




- Sur $]0, +\infty[$.
$$\forall x \in ]0, +\infty[, \qquad f(x) = \frac{x}{1+x}$$
La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc à fortori sur $]0, +\infty[$. La fonction $x \mapsto 1+x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc à fortori sur $]0, +\infty[$ et ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. Donc, par quotient, la fonction $f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et
$$\forall x \in ]0, +\infty[, \qquad f'(x) = \frac{1 \times (1+x) - x \times 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$$
- Sur $]-\infty, 0[$. On montre de même que $f$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et
$$\forall x \in ]-\infty, 0[, \qquad f'(x) = \frac{1 \times (1-x) - x \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$
- Dérivabilité en $0$ via le **taux d'accroissement**.
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{1 + |x|} \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \in \mathbb{R}$$
Donc $f$ est dérivable en $0$ et
$$f'(0) = 1$$
- Finalement, la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**Exemple 2.7** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$




1. Faire une conjecture sur la continuité et dérivabilité de la fonction à partir du graphe.
2. Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

**Gestes Invisibles/Automatismes.** Fonction définie par morceaux : problème potentiel de continuité et dérivabilité à la jonction, c'est-à-dire en $x = 0$. De plus, comme elle est définie par morceaux, pour étudier la continuité et la dérivabilité, il faut faire les limites à droite et à gauche.

1. Le graphe ne comporte pas de «trous», donc la fonction semble continue. Mais on observe une «cassure» (changement de pente) autour de 0, donc la fonction ne semble pas dérivable en 0.
2. 
   - Sur $]0, +\infty[$.
   $$\forall x \in ]0, +\infty[, \qquad f(x) = e^x$$
   La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc à fortiori sur $]0, +\infty[$. Donc la fonction $f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et donc continue sur $]0, +\infty[$.
   - Sur $]-\infty, 0[$.
   $$\forall x \in ]-\infty, 0[, \qquad f(x) = 1 - x^2$$
   La fonction $x \mapsto 1 - x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) donc à fortiori sur $]-\infty, 0[$. Donc la fonction $f$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et donc continue sur $]-\infty, 0[$.
   - Étude au point de jonction (en $x = 0$).
     - Étude de la continuité en 0.
     $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x = 1 \quad / \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 1 - x^2 = 1 \quad / \quad f(0) = 1$$
     Comme
     $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0).$$
     la fonction $f$ est continue en 0.
     - Étude de la dérivabilité en 0 grâce au taux d'accroissement.
     $$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} -x = 0 \in \mathbb{R}$$
     La fonction $f$ admet une dérivée à droite et à gauche en 0, mais ces deux dérivées ne coïncident pas. Donc la fonction $f$ n'est pas dérivable en 0.

Au final, la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable seulement sur $\mathbb{R}^*$.

## 2.3 Dérivée d'une fonction réciproque

**Proposition 2.8** Soit $f : I \to J$ une fonction **bijective** de $I$ sur $J$, de bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$.
On suppose que
① la fonction $f$ est **dérivable** sur $I$,
② la dérivée de $f$ ne s'**annule pas** sur $I$.
Alors $f^{-1}$ est dérivable sur $J$ et

$$\forall x \in J, \qquad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

*Démonstration.* On sait que

$$\forall x \in J, \qquad (f \circ f^{-1})(x) = x$$

En dérivant cette égalité, on obtient que,

$$\forall x \in J, \qquad f^{-1}(x) \times f'(f^{-1}(x)) = 1$$

Comme $f'$ ne s'annule pas, on obtient que

$$\forall x \in J, \qquad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

■

**Exemple 2.9** On considère la fonction $f$ définie sur $I = \left]0, \frac{1}{2}\right[$ par

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = 2\mathrm{e}^{-x}\sqrt{x}.$$

1. Montrer que $f$ réalise une bijection entre $I$ et un intervalle à déterminer.
2. On note $g = f^{-1}$. Justifier que $g$ est dérivable sur $J$ et que

$$\forall x \in J, \qquad g'(x) = \frac{2\sqrt{g(x)}}{\mathrm{e}^{-g(x)}(1-2g(x))}.$$

1. Pour montrer que $f$ réalise une bijection entre $I$ et un intervalle à déterminer, on va appliquer le théorème de la bijection.
   ① La fonction $f$ est définie sur l'**intervalle** $I$.
   ② La fonction $f$ est **continue** sur $I$.
   ③ Montrons que la fonction $f$ est **strictement croissante** sur $I$.
   (P) La fonction est dérivable sur $I$ et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = 2 \times (-\mathrm{e}^{-x})\sqrt{x} + 2\mathrm{e}^{-x}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\mathrm{e}^{-x}(1-2x)}{2\sqrt{x}} \geqslant 0.$$

   (E) L'équation $f'(x) = 0$ n'admet aucune solution dans $I$.
   Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction $f$ réalise une bijection de $I$ sur

$$J = \left]0, \frac{2\mathrm{e}^{-1/2}}{\sqrt{2}}\right[.$$

2. Comme $f$ est dérivable sur $I$ (par produit) et $f'$ ne s'annule pas sur $I$, sa bijection réciproque est dérivable sur $J$. De plus,

$$\forall x \in J, \qquad f(g(x)) = x \qquad \text{c-à-d} \qquad 2\exp(-g(x))\sqrt{g(x)} = x.$$

   Donc, en dérivant cette formule, on obtient,

$$\forall x \in J, \qquad g'(x) = \frac{2\sqrt{g(x)}}{\mathrm{e}^{-g(x)}(1-2g(x))}.$$

## 3 Dérivées sucessives

**Définition 3.1** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit les **dérivées successives** de $f$ sur $I$ par

$$\begin{cases} f^{(0)} = f \\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n+1)} = (f^{(n)})' \quad \text{à condition que } f^{(n)} \text{ existe} \end{cases}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Si la fonction $f^{(n)}$ est bien définie, on l'appelle la **dérivée $n$-ième** de $f$ ou la **dérivée d'ordre** $n$ de $f$. On dit que $f$ est $n$ **fois dérivable** sur $I$.
- Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f$ est $n$ fois dérivable sur $I$, on dit que $f$ est **indéfiniment dérivable** sur $I$.

**Exemple 3.2** Calculer les dérivées successives de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^4.$$

① **Dans un premier temps, on justifie que la fonction est indéfiniment dérivable.** La fonction $f$ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale.

② **Dans un second temps, on calcule les dérivées successives.** De plus, en dérivant successivement, on obtient,

$$\begin{array}{lrcl} \forall x \in \mathbb{R}, & f(x) & = & x^4, \\ \forall x \in \mathbb{R}, & f'(x) & = & 4x^3, \\ \forall x \in \mathbb{R}, & f''(x) & = & 12x^2, \\ \forall x \in \mathbb{R}, & f^{(3)}(x) & = & 24x \\ \forall x \in \mathbb{R}, & f^{(4)}(x) & = & 24, \end{array}$$

puis,

$$\forall n \geqslant 5, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = 0$$

**Définition 3.3** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. On dit que $f$ est de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur $I$ si $f$ est dérivable sur $I$ et que $f'$ est continue sur $I$.
2. On dit que $f$ est de **classe** $\mathcal{C}^2$ sur $I$ si $f$ est 2 fois dérivable sur $I$ et que $f''$ est continue sur $I$.
3. On dit que $f$ est de **classe** $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$ si elle est $n$ fois dérivable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

? Pour montrer qu'une fonction est de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur $I$, il s'agit de montrer :

- qu'elle est dérivable sur $I$ et calculer sa dérivée,
- et que sa dérivée est continue sur $I$.

En particulier, une fonction dérivable n'est pas forcément de classe $\mathcal{C}^1$, il ne faut pas oublier de discuter de la continuité de la dérivée.

**Proposition 3.4** Les fonctions usuelles - polynomiales, exp, ln - sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.

**Proposition 3.5** Les combinaisons linéaires, produits, quotients, puissances, composées de fonctions $n$ fois dérivables (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$, de classe $\mathcal{C}^2$, de classe $\mathcal{C}^\infty$) sont $n$ fois dérivables (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$, de classe $\mathcal{C}^2$, de classe $\mathcal{C}^\infty$).

**Exemple 3.6** Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer les dérivées successives de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \mathrm{e}^{ax}.$$

**Gestes Invisibles/Automatismes.** On doit trouver l'expression de $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ : on calcule les premières dérivées, on conjecture une formule que l'on démontre par récurrence.

① **Dans un premier temps, on justifie que la fonction est indéfiniment dérivable.** Soit $a \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, la fonction $x \mapsto ax$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. La fonction $x \mapsto \exp(x)$ est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (fonction usuelle). Par **composition**, la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

② **Dans un second temps, on calcule les dérivées successives.** Commençons par calculer les premières dérivées pour pouvoir conjecturer une formule générale. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \mathrm{e}^{ax}, \qquad f'(x) = a\mathrm{e}^{ax}, \qquad f''(x) = a^2\mathrm{e}^{ax}, \qquad \ldots.$$

Montrons par **récurrence** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante est vraie

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = a^n\mathrm{e}^{ax} \text{ ».}$$

- *Initialisation.* Montrons que la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(0)}(x) = a^0\mathrm{e}^{ax}$$

D'une part, par convention,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(0)}(x) = f(x) = \mathrm{e}^{ax}$$

D'autre part,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad a^0\mathrm{e}^{ax} = 1 \times \mathrm{e}^{ax} = \mathrm{e}^{ax}$$

Donc, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = a^n\mathrm{e}^{ax}$$

On veut montrer que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x) = a^{n+1}\mathrm{e}^{ax}$$

On a,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) && \text{par déf. de la dérivée } n+1\text{-ième} \\ &= a \times a^n\mathrm{e}^{ax} && \text{en dérivant l'hypothèse de réc.} \\ &= a^{n+1}\mathrm{e}^{ax}. \end{aligned}$$

Donc la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = a^n\mathrm{e}^{ax}$$

**Exemple 3.7** On considère la fonction $f$ définie sur $[0,1[$ par

$$\forall x \in [0,1[, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(x)} & \text{si } x \in ]0,1[ \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction $f$ est de classe $C^1$ sur $[0,1[$.

**Gestes Invisibles/Automatismes.** Fonction définie par morceaux : problème potentiel de continuité et dérivabilité à la jonction, c'est-à-dire en $x = 0$. De plus, comme elle est définie par morceaux, pour étudier la continuité et la dérivabilité, il faut faire les limites à droite et à gauche.

① **Montrer que la fonction est dérivable sur $I$ et calculer sa dérivée.**

- Sur $]0,1[$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable et ne s'annule pas sur $]0,1[$. La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $]0,1[$ en tant que fonction polynomiale. Donc, par quotient, la fonction $f$ est dérivable sur $]0,1[$ et

$$\forall x \in ]0,1[, \qquad f'(x) = \frac{1 \times \ln(x) - x \times \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$$

- Étude en 0. Par opérations sur les limites, on a On a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0 \in \mathbb{R}.$$

Donc la fonction $f$ est dérivable en 0 et

$$f'(0) = 0$$

Finalement, $f$ est dérivable sur $[0,1[$ et

$$\forall x \in [0,1[, \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2} & \text{si } x \in ]0,1[ \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

② **Montrer que la fonction dérivée est continue sur $I$.** Par opérations sur les fonctions continues, la dérivée $f'$ est continue sur $]0,1[$. Il reste à étudier la continuité en 0. On a

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{(\ln(x))^2} = 0 = f'(0).$$

Donc $f'$ est continue en 0. Finalement $f'$ est continue sur $[0,1[$.

④ En conclusion, on a montré que la fonction $f$ était de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.