# TD 19 – Dérivabilité d'une fonction

## Étude locale de la dérivée

**Exercice 1 – Preuve de la formule de dérivée pour la fonction inverse.** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$

1. Montrer que
$$\forall x, a \in \mathbb{R}, \qquad \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x-a} = -\frac{1}{ax}$$
2. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, la fonction $f$ est dérivable au point $a$ et que
$$f'(a) = -\frac{1}{a^2}.$$

**Exercice 2 – Preuve de la formule de dérivée pour la fonction cube.** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^3$$

1. Montrer que
$$\forall x, a \in \mathbb{R}, \qquad x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$$
2. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $f$ est dérivable au point $a$ et que
$$f'(a) = 3a^2.$$

**Exercice 3 – Preuve de la formule de dérivée pour les fonctions puissances.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^n$$

1. Montrer que
$$\forall x, a \in \mathbb{R}, \qquad x^n - a^n = (x-a) \times \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} a^k$$
2. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $f$ est dérivable au point $a$ et que
$$f'(a) = na^{n-1}.$$

**Exercice 4 – Taux d'accroissements.** À l'aide du taux d'accroissement, déterminer si les fonctions suivantes sont-elles dérivables au point indiqué.

i) $f(x) = \dfrac{2x}{1-|x|}$ en 0 ii) $g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en 1 iii) $h(x) = \sqrt{x+2}$ en $-2$

**Exercice 5 – Taux d'accroissements.** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = |x^2 - x|$$

1. Dresser le tableau de signe de la fonction $x \mapsto x^2 - x$.
2. En déduire une expression de $f$ sans valeur absolue (mais par morceaux).
3. Étudier la dérivabilité en 1 de la fonction $f$.

**Exercice 6 – Interprétation graphique de la dérivée.** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = xe^{-x}$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ (limites comprises).
2. Tracer la courbe représentative de la fonction $f$ ainsi que ses tangentes aux points d'abscisse 0 et 1 dont on donnera les équations.

**Exercice 7 – Calculs de limites grâce à la dérivabilité.** En vous appuyant sur la dérivabilité des fonctions usuelles, calculer les limites suivantes.

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ iii) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^{12} - 1}{h}$ iv) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^{12} - 1}{e^h - 1}$

## Étude globale de la dérivée

**Exercice 8 –** On considère la fonction $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad f(x) = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt{x})$$

Montrer que $f$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et donner sa dérivée sur $[0, +\infty[$.

**Exercice 9 –** On considère la fonction $f$ définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction $f$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et donner sa dérivée sur $[0, +\infty[$.

**Exercice 10 –** Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de $f$, son domaine de dérivabilité $\mathscr{D}'_f$ puis calculer l'expression de $f'$.

i) $f : x \mapsto xe^{x^2+1}$ iii) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$ v) $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

**Exercice 11 –** Déterminer les valeurs $a$ et $b$ pour que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

soit continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Exercice 12 – Dérivée d'une fonction réciproque.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = xe^x$$

1. Dresser le tableau de variations de $f$ (limites comprises).
2. Déterminer la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse 0.
3. Montrer que $f$ réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ vers un intervalle $J$ à préciser.
4. On note $g : J \to [-1,+\infty[$ sa bijection réciproque. Montrer que $g$ est dérivable sur $]-\mathrm{e}^{-1},+\infty[$ et que,
$$\forall x > -\mathrm{e}^{-1},\ x \neq 0, \qquad g'(x) = \frac{g(x)}{x(1+g(x))}$$

**Exercice 13 – Dérivée d'une fonction réciproque.** Soit $f$ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par,

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad f(x) = \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x}$$

1. Montrer que $f$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers un intervalle $J$ à préciser.
2. Justifier que $f^{-1}$ est dérivable sur $J$.
3. Que valent $f^{-1}(-1)$ et $(f^{-1})'(-1)$ ?
4. Montrer que
$$\forall x \geqslant 0, \qquad f'(x)^2 = f(x)^2 + 8$$
5. En déduire que,
$$\forall y \in J, \qquad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2+8}}$$

## Dérivées successives

**Exercice 14 –** On considère la fonction $f$ définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad f(x) = \begin{cases} x^2\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Justifier que $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
3. Justifier que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
4. La fonction $f$ est-elle deux fois dérivable en 0 ?

**Exercice 15 –** On considère la fonction $f$ définie sur $[1,+\infty[$ par

$$\forall x \in [1,+\infty[, \qquad f(x) = \sqrt{x-1} \times \ln(x).$$

Montrer que la fonction $f$ est de classe $C^1$ sur $[1,+\infty[$.

**Exercice 16 –** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par,

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \qquad f(x) = \frac{1}{x-1}.$$

1. Justifier que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et sur $]-\infty,1[$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

**Exercice 17 –** Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer les dérivées successives de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^p,$$

après avoir justifier le caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la fonction.

**Exercice 18 –** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = (x^2+1)\mathrm{e}^{2x}$$

Justifier que la fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{2x}\left[2^n(x^2+1) + 2^n nx + n(n-1)2^{n-2}\right]$$

## Pour aller plus loin

**Exercice 19 – Etude globale d'une fonction.** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$.
2. Justifier que $f$ est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.
3. La fonction $f$ est-elle continue en 0 ?
4. Étudier la parité de $f$.
5. Déterminer les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
6. Étudier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f(x)-x$. Interpréter ce résultat.
7. Tracer la courbe représentative de la fonction $f$.

**Exercice 20 –** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

1. Montrer que $f$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$. On note toujours $f$ ce prolongement.
2. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Justifier que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale $P_n$ telle que,
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$
5. En déduire que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.