

COLLE 19 - Semaine du 17/03 au 21/03

La colle débutera par une question de cours et un exercice de cours (voir page 2).

Chapitre 18 - Séries numériques

- Notion de série : somme partielle d'indice n , suite des sommes partielles, terme général
- Convergence/Divergence d'une série et notion de somme
- Condition nécessaire de convergence : si la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_k$ diverge
- Cas particulier des séries de terme général positif : la suite des sommes partielles est croissante
- Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs
- Notion de convergence absolue
- Séries de référence : séries télescopiques, séries géométriques et géométriques dérivées, séries exponentielles
- Opérations sur les séries convergentes (somme et multiplication par un scalaire)

Chapitre 19 - Dérivabilité d'une fonction

- Formules de dérivées des fonctions usuelles
- Étude locale de la dérivée
 - Dérivabilité en un point/Taux d'accroissement en un point/Nombre dérivé
 - Dérivabilité à gauche et à droite en un point/Nombre dérivé à gauche et à droite
 - Interprétation géométrique de la dérivée en un point : lien avec l'équation de la tangente en cas de dérivabilité, asymptote verticale en cas de non dérivabilité
 - Développement limité à l'ordre 1, utilisation pour calculer des limites
 - Lien entre continuité en un point et dérivabilité en un point
- Étude globale de la dérivée
 - Utilisation de la dérivabilité pour calculer des limites
 - Dérivabilité sur un intervalle
 - Ensemble de dérivation des fonctions usuelles (polynômes, racine carrée, exp, ln,...)
 - Opérations sur les fonctions dérivables (combinaisons linéaires, produit, quotient, dérivabilité de la fonction réciproque pour une fonction bijective)
- Dérivées successives, fonctions de classe $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2, \mathcal{C}^\infty$

Informatique

- Calculs simples en python : +, -, *, /, **
- Notion de variable. Afficher une valeur avec print.
- Maîtriser la notion d'instruction conditionnelle
- Savoir définir une fonction
- Comprendre une boucle for.
- Comprendre une boucle while.
- Savoir tracer le graphe d'une fonction ou d'une suite à l'aide de matplotlib
- Savoir simuler les lois usuelles

Questions de cours & exercices de cours

Une question de cours et un exercice de cours seront demandés parmi les suivants. La question de cours sera notée sur cinq points, et de même pour l'exercice de cours, soit un total de **10 points** (sur les 20 au total). Néanmoins, tout énoncé du cours pourra faire l'objet d'une question de cours, à tout moment de la colle.

Un énoncé :

- ☐ Critère de convergence d'une série géométrique (Chap. 18 - Proposition 3.3)
- ☐ Critère de convergence des séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2 (Chap. 18 - Proposition 3.5)
- ☐ Critère de convergence d'une série exponentielle (Chap. 18 - Proposition 3.7)

- ☐ Définition de la dérivabilité d'une fonction en un point (Chap. 19 - Définition 1.1)
- ☐ Lien entre continuité et dérivabilité : énoncer l'implication qui est vraie et donner un contre-exemple (ou deux ?) pour l'implication qui est fausse (Chap. 19 - Proposition 1.12 + Remarque en dessous)
- ☐ Donner l'ensemble de dérivabilité des fonctions usuelles suivantes : les fonctions polynomiales, la fonction exponentielle, la fonction logarithme et la fonction racine carrée (Chap. 19 - Proposition 2.3)

Un exercice :

- ☐ Étudier la nature de la série suivante et donner sa somme en cas de convergence. (Chap. 18 - Exemple 3.1)

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right)$$

- ☐ Étudier la nature des séries suivantes et donner leur somme en cas de convergence (Chap. 18 - Exemples 3.4 et 3.6)

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{4} \right)^k \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{3^k} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{k}{3^{k-1}}$$

- ☐ Étudier la nature des séries suivantes et donner leur somme en cas de convergence (Chap. 18 - Exemple 3.8)

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2^k}{k!} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{3^k \times k!} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k!}$$

- ☐ Étudier la dérivabilité de la fonction valeur absolue en 0. (Chap. 19 - Exemple 1.7)
- ☐ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Étudier sa dérivabilité en 0. (Chap. 19 - Exemple 2.7 (une partie seulement de la question 2))
- ☐ (Rappel d'un chapitre précédent) On considère la fonction f définie sur $I =]0, \frac{1}{2}[$ par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = 2e^{-x}\sqrt{x}.$$

Montrer que f réalise une bijection entre I et un intervalle à déterminer. (Chap. 19 - Exemple 2.9, Question 1)

- ☐ On considère une urne contenant 5 boules rouges (numérotées 1,2,3,4,5) et 4 boules jaunes (numérotées 6,7,8,9). On réalise 8 tirages avec remise dans cette urne. On note
 - Pour tout $k \in \{1, \dots, 8\}$, X_k la variable aléatoire donnant le numéro obtenu au k -ième tirage.
 - R la variable aléatoire égale au nombre total de boules rouges obtenues.
 - J la variable aléatoire égale au nombre total de boules jaunes obtenues.
 1. Réaliser une simulation de X_1 à l'aide de Python.
 2. Réaliser une simulation de R à l'aide de Python.
 3. Réaliser une simulation de J à l'aide de Python.

(TP 06 - Exercice 2)