TD 20 – L'ESPACE VECTORIEL $\mathbb{R}^n$

1 Combinaisons linéaires

Exercice 1 – *Exemple 1.7.* *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Soient $u = (7,2,-6)$, $u_1 = (2,1,-1)$, $u_2 = (1,1,1)$ et $u_3 = (0,1,2)$. Montrer que u est une combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3.
2. Soient $u = (1,1,1)$, $u_1 = (1,1,2)$ et $u_2 = (1,-1,0)$. Montrer que u n'est pas une combinaison linéaire de u_1 et u_2.

2 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Exercice 2 – Méthodes 1 & 2, *Exemples 2.2, 2.3, 2.4 & 2.5.* Les ensembles décrits ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace E ? Justifier.

$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z=0\} \qquad \text{dans } E = \mathbb{R}^3$$

$$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z=1\} \qquad \text{dans } E = \mathbb{R}^3$$

$$F_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=x^2\} \qquad \text{dans } E = \mathbb{R}^2$$

$$F_4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+3y+z=0\} \qquad \text{dans } E = \mathbb{R}^4$$

$$F_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+2z=0 \text{ et } 3x-y+z=0\right\} \qquad \text{dans } E = \mathbb{R}^3$$

3 Sous-espaces vectoriels engendré par une famille de vecteurs

Exercice 3 – Méthode 3, *Exemple 2.7.* Soit $G = \mathrm{Vect}((1,-1,-1),(-6,1,4))$. Les vecteurs $v_1 = (1,4,1)$ et $v_2 = (-1,0,1)$ appartiennent-ils à G ?

Exercice 4 – Méthode 4, *Exemple 2.11.* Exhiber une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ telle que F_1 soit l'espace engendré par cette famille. Faire de même pour les espaces F_4 et F_5.

Exercice 5 – Méthode 5, *Exemple 2.12.*

1. On considère le vecteur de $\mathbb{R}^3$ suivant : $u_1 = (1,2,3)$. Soit $G_1 = \mathrm{Vect}(u_1)$. Trouver un système d'équation·s définissant G_1.
2. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (-1,0,1)$. Soit $G_2 = \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$. Trouver un système d'équation·s définissant G_2.
3. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1,2,0)$, $u_2 = (2,1,0)$ et $u_3 = (1,0,1)$ Soit $G_3 = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$. Trouver un système d'équation·s définissant G_2.

4 Familles génératrices

Exercice 6 – Méthode 6, *Exemples 3.3 & 3.4.*

1. Montrer que $((1,2),(0,-1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 – Méthode 7, *Exemple 3.5.*

1. Montrer que $F_5 = \{(t,4t), t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et en déterminer une famille génératrice.
2. Montrer que $F_7 = \{(a,a+b,b),(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.
3. Montrer que $F_8 = \{(a+b,a-2b,3b-a),(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.

Exercice 8 – Méthode 7, *Exemple 3.6.*

1. Montrer que $F_9 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une famille génératrice.
2. Montrer que $F_{10} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une famille génératrice.

5 Familles libres

Exercice 9 – Méthode 8, *Exemple 3.10.* Montrer que $((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10 – Méthodes 8 & 9, *Exemples 3.10, 3.11, 3.12 & 3.13.* Les familles suivantes des $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ?

1. $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$
2. $u_1 = (0,1,-1)$, $u_2 = (1,0,-1)$, $u_3 = (1,-1,0)$
3. $u_1 = (0,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (1,1,1)$
4. $u_1 = (1,1,-1)$, $u_2 = (1,-1,1)$, $u_3 = (-1,1,1)$, $u_4 = (1,1,1)$

Exercice 11 – Soient $u = (1,1,m)$, $v = (0,1,2)$ et $w = (1,0,3)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel m pour que la famille (u,v,w) soit libre.

6 Bases

Exercice 12 – Méthode 10, *Exemple 3.16.*

1. Montrer que la famille $((1,2),(-1,3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la famille $((1,0,1),(2,1,0),(1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13 – Méthode 11, *Exemple 3.18.* On considère les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1,2,0)$, $u_2 = (0,0,3)$, $u_3 = (1,2,3)$ et $u_4 = (-2,-4,1)$. Déterminer une base de $F = \text{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

Exercice 14 – Méthode 12, *Exemple 3.19.* Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et en déterminer une base.

1. $G_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$
2. $G_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0, x + 2y + 3z + 4t = 0\}$
3. $G_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = 3z\}$
4. $G_4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = y + z = z + t = t + x = 0\}$

7 Pour aller plus loin

Exercice 15 – Soient

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\} \\ G &= \{(b-2a, a+2b, a+b) \text{ avec } a,b \in \mathbb{R}\} \\ H &= \text{Vect}\Big((1,5,1)\ ,\ (2,1,-1)\ ,\ (-1,4,2) \Big) \end{aligned}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
3. Déterminer une base de H.
4. Déterminer une équation cartésienne définissant G.
5. Déterminer une base de $F \cap G$.
6. Démontrer que $H = F$.

Exercice 16 – Soient $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (0,2,2)$, $u_3 = (1,3,3)$ et $u_4 = (1,-1,-1)$. Montrer que

$$\text{Vect}(u_1,u_2) = \text{Vect}(u_3,u_4).$$

Exercice 17 – Soit $n \geqslant 2$. On note $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on considère F la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par,

$$F = \{(x_1,\ \dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}.$$

Pour tout $i \in \{1,\dots,n-1\}$, on pose $u_i = e_i - e_n$. Montrer que

$$F = \text{Vect}(u_1,\dots u_{n-1})$$