

TD 20 – L'ESPACE VECTORIEL \mathbb{R}^n

1 Combinaisons linéaires

Exercice 1 – Exemple 1.7. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soient $u = (7, 2, -6)$, $u_1 = (2, 1, -1)$, $u_2 = (1, 1, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 2)$. Montrer que u est une combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3 .
2. Soient $u = (1, 1, 1)$, $u_1 = (1, 1, 2)$ et $u_2 = (1, -1, 0)$. Montrer que u n'est pas une combinaison linéaire de u_1 et u_2 .

Correction.

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
 u = au_1 + bu_2 + cu_3 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b &= 7 \\ a + b + c &= 2 \\ -a + b + 2c &= -6 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c &= 2 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2a + b &= 7 \\ -a + b + 2c &= -6 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c &= 2 \\ -b - 2c &= 3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 2b + 3c &= -4 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c &= 2 \\ -b - 2c &= 3 \\ -c &= 2 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= 3 \\ b &= 1 \\ c &= -2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc, finalement,

$$u = 3 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 - 2 \cdot u_3$$

et donc u est bien une combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2 et u_3 .

2. Supposons par l'absurde que u est une combinaison linéaire des vecteurs u_1 et u_2 . Alors, il existe deux réels a et b tels que $u = au_1 + bu_2$. Donc, les réels a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 1 \\ 2a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

C'est donc absurde. Ainsi, u n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs u_1 et u_2 . ■

2 Sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n

Exercice 2 – Méthodes 1 & 2, Exemples 2.2, 2.3, 2.4 & 2.5. Les ensembles décrits ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace E ? Justifier.

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\} \quad \text{dans } E = \mathbb{R}^3$$

$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 1\} \quad \text{dans } E = \mathbb{R}^3$$

$$F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\} \quad \text{dans } E = \mathbb{R}^2$$

$$F_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3y + z = 0\} \quad \text{dans } E = \mathbb{R}^4$$

$$F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 2z = 0 \text{ et } 3x - y + z = 0\} \quad \text{dans } E = \mathbb{R}^3$$

Correction.

- Montrons que F_1 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
 - ① F_1 est bien inclus dans \mathbb{R}^3 .
 - ② L'élément neutre $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$ appartient à F_1 car $0 + 0 - 2 \times 0 = 0$.
 - ③ Soient $u = (x_1, y_1, z_1)$ et $v = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs de F_1 , c'est-à-dire deux éléments de \mathbb{R}^3 qui vérifient

$$x_1 + y_1 - 2z_1 = 0 \quad \text{et} \quad x_2 + y_2 - 2z_2 = 0$$

et soient a et b deux nombres réels. Montrons que le vecteur $au + bv$ est dans F_1 .

– Dans un premier temps, on peut calculer que le vecteur $au + bv$ est donné par

$$au + bv = a(x_1, y_1, z_1) + b(x_2, y_2, z_2) = (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2, az_1 + bz_2) = (X, Y, Z).$$

– Montrons que $au + bv \in F_1$, c'est-à-dire que

$$X + Y - 2Z = 0.$$

En utilisant le fait que u et v sont dans F_1 , on obtient que

$$\begin{aligned} X + Y - 2Z &= ax_1 + bx_2 + ay_1 + by_2 - 2(az_1 + bz_2) \\ &= a(x_1 + y_1 - 2z_1) + b(x_2 + y_2 - 2z_2) \\ &= a \cdot 0 + b \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $au + bv \in F_1$.

Finalement, F_1 est bien un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

- L'ensemble F_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 car l'élément neutre $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$ n'appartient pas à F_2 car $0 + 0 - 2 \times 0 \neq 1$.
- L'ensemble F_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 car il n'est pas stable par combinaison linéaire. En effet, l'élément $(1, 1)$ appartient à F_3 (car $1^2 = 1$) et l'élément $(-1, 1)$ aussi (car $1 = (-1)^2$). Pourtant, l'élément $(1, 1) + (-1, 1) = (0, 1)$ n'appartient pas à F_3 car $1 \neq 0^2$.
- On montre que F_4 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .
- On montre que F_5 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

■

3 Sous-espaces vectoriels engendré par une famille de vecteurs

Exercice 3 – Méthode 3, Exemple 2.7. Soit $G = \text{Vect}((1, -1, -1), (-6, 1, 4))$. Les vecteurs $v_1 = (1, 4, 1)$ et $v_2 = (-1, 0, 1)$ appartiennent-ils à G ?

Correction.

- Montrons que $v_1 = (1, 4, 1) \in G$, c'est-à-dire trouvons deux réels a et b tels que

$$v_1 = a(1, -1, -1) + b(-6, 1, 4).$$

Pour trouver les coefficients a et b , on peut résoudre le système donné par l'égalité au-dessus. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$v = a(1, -1, -1) + b(-6, 1, 4) \Leftrightarrow \begin{cases} a - 6b = 1 \\ -a + b = 4 \\ -a + 4b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 6b = 1 \\ -5b = 5 \\ -2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Finalement, on obtient que

$$v_1 = -5(1, -1, -1) - (-6, 1, 4).$$

Et donc que v_1 appartient à G .

Montrons que $v_2 = (-1, 0, 1) \notin G$. Supposons par l'absurde que $v_2 \in G$. Alors, il existe deux réels a et b tels que

$$v_2 = a(1, -1, -1) + b(-6, 1, 4),$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} a - 6b = -1 \\ -a + b = 0 \\ -a + 4b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 6b = 1 \\ -5b = -1 \\ -2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 6b = 1 \\ b = \frac{1}{5} \\ b = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières lignes sont incompatibles. C'est absurde. Donc v_2 n'appartient pas à G . ■

Exercice 4 – Méthode 4, Exemple 2.11. Exhiber une famille de vecteurs de \mathbb{R}^3 telle que F_1 soit l'espace engendré par cette famille. Faire de même pour les espaces F_4 et F_5 .

Correction.

- Soit $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$ un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec trois inconnues et une équation (Étape 1). Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$u \in F_1 \quad \Leftrightarrow \quad x + y - 2z = 0 \quad (\text{Étape 2})$$

On a une équation pour trois inconnues : on choisit une inconnue principale - par exemple x - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes - ici y et z .

$$u \in F_1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -y + 2z \quad (\text{Étape 3})$$

Ainsi, on obtient que

$$u \in F_1 \quad \Leftrightarrow \quad u = (-y + 2z, y, z) \quad (\text{Étape 4})$$

$$\Leftrightarrow \quad u = y(-1, 1, 0) + z(2, 0, 1) \quad (\text{Étape 5})$$

$$\Leftrightarrow \quad u \in \text{Vect}((-1, 1, 0), (2, 0, 1)) \quad (\text{Étape 6})$$

Donc

$$F_1 = \text{Vect}((-1, 1, 0), (2, 0, 1)).$$

Ceci redémontre au passage que F_1 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

- On montre de même que

$$F_4 = \text{Vect}((1, 0, -2, 0), (0, 1, -3, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

- Soit $F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 2z = 0 \text{ et } 3x - y + z = 0\}$ un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec trois inconnues et deux équations (Étape 1). Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$u \in F_5 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases} \quad (\text{Étape 2})$$

On a deux équation pour trois inconnues : on choisit deux inconnues principales - par exemple x et y - que l'on exprime en fonction de l'inconnue restante - ici z .

$$u \in F_5 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ -7y - 5z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -\frac{4}{7}z \\ y = -\frac{5}{7}z \end{cases} \quad (\text{Étape 3})$$

Ainsi, on obtient que

$$u \in F_5 \quad \Leftrightarrow \quad u = \left(-\frac{4}{7}z, -\frac{5}{7}z, z\right) \quad (\text{Étape 4})$$

$$\Leftrightarrow \quad u = z\left(-\frac{4}{7}, -\frac{5}{7}, 1\right) \quad (\text{Étape 5})$$

$$\Leftrightarrow \quad u \in \text{Vect}\left(-\frac{4}{7}, -\frac{5}{7}, 1\right) \quad (\text{Étape 6})$$

Donc

$$F_5 = \text{Vect}\left(-\frac{4}{7}, -\frac{5}{7}, 1\right)$$

Ceci redémontre au passage que F_5 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

■

Exercice 5 – Méthode 5, Exemple 2.12.

1. On considère le vecteur de \mathbb{R}^3 suivant : $u_1 = (1, 2, 3)$. Soit $G_1 = \text{Vect}(u_1)$. Trouver un système d'équation-s définissant G_1 .
2. On considère les vecteurs de \mathbb{R}^3 suivants : $u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (-1, 0, 1)$. Soit $G_2 = \text{Vect}(u_1, u_2)$. Trouver un système d'équation-s définissant G_2 .
3. On considère les vecteurs de \mathbb{R}^3 suivants : $u_1 = (1, 2, 0), u_2 = (2, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 1)$ Soit $G_3 = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. Trouver un système d'équation-s définissant G_2 .

Correction.

1. Soit $G_1 = \text{Vect}((1, 2, 3))$. Trouvons un système d'équation-s définissant G_1 . Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$u \in G_1 \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \quad a(1, 2, 3) = u \quad (\text{Étape 1})$$

$$\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} a = x \\ 2a = y \\ 3a = z \end{cases} \quad (\text{Étape 2})$$

- Si $y = 2x$ et $z = 3x$ alors ce système admet bien une solution.
- Si $y \neq 2x$ ou $z \neq 3x$ alors ce système n'admet pas de solution (lignes incompatibles).

Finalement,

$$u \in G_1 \Leftrightarrow y = 2x \text{ et } z = 3x. \quad (\text{Étape 3})$$

Donc

$$G_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x \text{ et } z = 3x\} \quad (\text{Étape 4})$$

2. Soit $G_2 = \text{Vect}((1, 2, 3), (-1, 0, 1))$. Trouvons un système d'équation-s définissant G_2 . Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$u \in G_2 \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad a(1, 2, 3) + b(-1, 0, 1) = u \quad (\text{Étape 1})$$

$$\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} a - b = x \\ 2a = y \\ 3a + b = z \end{cases} \quad (\text{Étape 2})$$

$$\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} b = \frac{y}{2} - x \\ a = \frac{y}{2} \\ b = z - \frac{3y}{2} \end{cases} \quad (\text{Étape 2})$$

- Si $\frac{y}{2} - x = z - \frac{3y}{2}$ alors ce système admet bien une solution.
- Si $\frac{y}{2} - x \neq z - \frac{3y}{2}$ alors ce système n'admet pas de solution (lignes incompatibles).

Finalement,

$$u \in G_2 \Leftrightarrow \frac{y}{2} - x = z - \frac{3y}{2} \Leftrightarrow y - 2x = 2z - 3y \Leftrightarrow x - 2y + z = 0 \quad (\text{Étape 3})$$

Donc

$$G_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\} \quad (\text{Étape 4})$$

3. On montre de même que $G_3 = \mathbb{R}^3$.



4 Familles génératrices

Exercice 6 – Méthode 6, Exemples 3.3 & 3.4.

1. Montrer que $((1,2), (0,-1))$ est génératrice de \mathbb{R}^2 .
2. Montrer que $((1,0,1), (1,1,0), (0,1,1))$ est génératrice de \mathbb{R}^3 .

Correction.

1. Soient $e_1 = (1,2)$ et $e_2 = (0,-1)$. Montrons que (e_1, e_2) est génératrice de \mathbb{R}^2 .

- ① Les vecteurs e_1 et e_2 appartiennent à \mathbb{R}^2 .
- ② Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons qu'il existe a et b deux réels tels que $u = ae_1 + be_2$. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$ae_1 + be_2 = u \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ 2a - b = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = 2x - y \end{cases}$$

En prenant $a = x$ et $b = 2x - y$ on a bien $u = ae_1 + be_2$.

Ceci prouve que la famille (e_1, e_2) est génératrice de \mathbb{R}^2 .

2. Soient $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (1,1,0)$ et $e_3 = (0,1,1)$. Montrons que (e_1, e_2, e_3) est génératrice de \mathbb{R}^3 .

- ① Les vecteurs e_1, e_2 et e_3 appartiennent à \mathbb{R}^3 .
- ② Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Montrons qu'il existe a, b et c trois réels tels que $u = ae_1 + be_2 + ce_3$. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} ae_1 + be_2 + ce_3 = u &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b & = x \\ b + c & = y \\ a + c & = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b & = x \\ b + c & = y \\ -b + c & = z - x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b & = x \\ b + c & = y \\ 2c & = z - x + y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a & = \frac{1}{2}(x - y + z) \\ b & = \frac{1}{2}(x + y - z) \\ c & = \frac{1}{2}(-x + y + z) \end{cases} \end{aligned}$$

En prenant $a = \frac{1}{2}(x - y + z)$, $b = \frac{1}{2}(x + y - z)$ et $c = \frac{1}{2}(-x + y + z)$, on a bien $u = ae_1 + be_2 + ce_3$.

Ceci prouve que la famille (e_1, e_2, e_3) est génératrice de \mathbb{R}^3 . ■

Exercice 7 – Méthode 7, Exemple 3.5.

1. Montrer que $F_5 = \{(t, 4t), t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 et en déterminer une famille génératrice.
2. Montrer que $F_7 = \{(a, a+b, b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 et en déterminer une famille génératrice.
3. Montrer que $F_8 = \{(a+b, a-2b, 3b-a), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 et en déterminer une famille génératrice.

Correction.

1. Déterminons une famille génératrice de $F_5 = \{(t, 4t), t \in \mathbb{R}\}$. L'ensemble est défini de manière paramétrique avec un paramètre (Étape 1). Soit $u \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} u \in F_5 &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, u = (t, 4t) && \text{(Étape 2)} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, u = t(1, 4) && \text{(Étape 3)} \\ &\Leftrightarrow u \in \text{Vect}((1, 4)) && \text{(Étape 4)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_5 = \text{Vect}((1, 4))$$

donc F_5 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 et la famille

$((1, 4))$ est génératrice de F_5 .

2. Déterminons une famille génératrice de $F_7 = \{(a, a+b, b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. L'ensemble est défini de manière paramétrique avec deux paramètres (Étape 1). Soit $u \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} u \in F_7 &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, u = (a, a+b, b) && \text{(Étape 2)} \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, u = a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1) && \text{(Étape 3)} \\ &\Leftrightarrow u \in \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1)) && \text{(Étape 4)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_7 = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$$

donc F_7 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 et la famille

$((1, 1, 0), (0, 1, 1))$ est génératrice de F_7 .

3. On montre de même que F_8 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 et la famille

$((1, 1, -1), (1, -2, 3))$ est génératrice de F_8 .



Exercice 8 – Méthode 7, Exemple 3.6.

1. Montrer que $F_9 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 et en déterminer une famille génératrice.
2. Montrer que $F_{10} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et en déterminer une famille génératrice.

Correction.

1. Déterminons une famille génératrice de $F_9 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$. L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec trois inconnues et une équation (Étape 1). Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$u \in F_9 \iff x - 2y + 3z = 0 \quad (\text{Étape 2})$$

On a une équation pour trois inconnues : on choisit une inconnue principale - par exemple x - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes, ici y et z .

$$u \in F_9 \iff x = 2y - 3z \quad (\text{Étape 3})$$

Ainsi, on obtient que

$$u \in F_9 \iff u = (2y - 3z, y, z) \quad (\text{Étape 4})$$

$$\iff u = y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1) \quad (\text{Étape 5})$$

$$\iff u \in \text{Vect}((2, 1, 0), (-3, 0, 1)) \quad (\text{Étape 6})$$

Ainsi,

$$F_9 = \text{Vect}((2, 1, 0), (-3, 0, 1))$$

donc F_9 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 et la famille

$$(2, 1, 0), (-3, 0, 1) \text{ est génératrice de } F_9.$$

2. Déterminons une famille de génératrice de $F_{10} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\}$. L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec quatre inconnues et deux équations (Étape 1). Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$u \in F_{10} \iff (S) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z - t = 0 \end{cases} \quad (\text{Étape 2})$$

On a deux équations pour quatre inconnues : on choisit deux inconnues principales - par exemple x et y - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes, ici z et t , grâce à la méthode du pivot de Gauss.

$$(S) \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = -z - t \end{cases} \quad (\text{Étape 3})$$

Ainsi, on obtient que

$$u \in F_{10} \iff u = (t, -z - t, z, t) \quad (\text{Étape 4})$$

$$\iff u = z(0, -1, 1, 0) + t(1, -1, 0, 1) \quad (\text{Étape 5})$$

$$\iff u \in \text{Vect}((0, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)) \quad (\text{Étape 6})$$

Ainsi,

$$F_{10} = \text{Vect}((0, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1))$$

donc F_{10} est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et la famille

$$(0, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1) \text{ est génératrice de } F_{10}.$$



5 Familles libres

Exercice 9 – Méthode 8, Exemple 3.10. Montrer que $((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$ est libre dans \mathbb{R}^3 .

Correction. Soient $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$ et $u_3 = (0, 1, 1)$. Montrons que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre. Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

On a

$$\begin{aligned} & \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{donc} & \quad \lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(0, 1, 1) = (0, 0, 0) \\ \text{donc} & \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 & = 0 \end{cases} \\ \text{donc} & \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ - \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \text{donc} & \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ & 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ \text{donc} & \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

Donc la famille (u_1, u_2, u_3) est libre. ■

Exercice 10 – Méthodes 8 & 9, Exemples 3.10, 3.11, 3.12 & 3.13. Les familles suivantes des \mathbb{R}^3 sont-elles libres ou liées ?

1. $u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1)$
2. $u_1 = (0, 1, -1), u_2 = (1, 0, -1), u_3 = (1, -1, 0)$
3. $u_1 = (0, 0, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (1, 1, 1)$
4. $u_1 = (1, 1, -1), u_2 = (1, -1, 1), u_3 = (-1, 1, 1), u_4 = (1, 1, 1)$

Correction.

1. Montrons que la famille (u_1, u_2) est libre. Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

On a

$$\begin{aligned} & \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{donc} & \lambda_1 (1, 1, 0) + \lambda_2 (0, 1, 1) = (0, 0, 0) \\ \text{donc} & \begin{cases} \lambda_1 & & & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & & & = & 0 \\ & + \lambda_2 & & = & 0 \end{cases} \\ \text{donc} & \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

Donc la famille (u_1, u_2) est libre.

2. Montrons que la famille (u_1, u_2, u_3) est liée. On cherche $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

- **Première méthode :** On cherche «à l'oeil» un lien entre les trois vecteurs. En effet, on peut remarquer directement que

$$u_1 - u_2 + u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Donc la famille (u_1, u_2, u_3) est liée.

- **Deuxième méthode :** On cherche une solution non nulle au système donné par la relation $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} & \Leftrightarrow \begin{cases} & \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 & & - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 & - \lambda_2 & & = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} & \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 & & - \lambda_3 = 0 \\ & - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} & \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 & & - \lambda_3 = 0 \\ & & 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_1 = -\lambda_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, on peut prendre $\lambda_3 = 1$ et donc $\lambda_1 = 1$, puis $\lambda_2 = -1$, et on retrouve que

$$u_1 - u_2 + u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Donc la famille (u_1, u_2, u_3) est liée.

3. Montrons que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

On a

$$\begin{aligned} & \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{donc} & \lambda_1 (0, 0, 1) + \lambda_2 (0, 1, 1) + \lambda_3 (1, 1, 1) = (0, 0, 0) \\ \text{donc} & \begin{cases} & \lambda_3 = 0 \\ & \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \end{cases} \\ \text{donc} & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

Donc la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

4. Montrons que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est liée. On peut remarquer directement que

$$u_1 + u_2 + u_3 = u_4$$

Donc la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est liée.

■

Exercice 11 – Soient $u = (1, 1, m)$, $v = (0, 1, 2)$ et $w = (1, 0, 3)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel m pour que la famille (u, v, w) soit libre.

6 Bases

Exercice 12 – Méthode 10, Exemple 3.16.

1. Montrer que la famille $((1,2), (-1,3))$ est une base de \mathbb{R}^2 .
2. Montrer que la famille $((1,0,1), (2,1,0), (1,1,1))$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Correction.

1. Soient $u_1 = (1,2)$ et $u_2 = (-1,3)$. Montrons que la famille (u_1, u_2) est une base de \mathbb{R}^2 .
 - ① Tous les vecteurs u_1 et u_2 appartiennent à \mathbb{R}^2 .
 - ② Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons qu'il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = au_1 + bu_2$. Pour cela, résolvons le système associé. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
 u = au_1 + bu_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = x \\ 2a + 3b = y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = x \\ 5b = y - 2x \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3x}{5} + \frac{y}{5} \\ b = -\frac{2x}{5} + \frac{y}{5} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc, le système admet une unique solution, c'est-à-dire qu'il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = au_1 + bu_2$.

Donc la famille (u_1, u_2) est une base de \mathbb{R}^2 .

2. Soient $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (2,1,0)$ et $u_3 = (1,1,1)$. Montrons que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de \mathbb{R}^3 .
 - ① Tous les vecteurs u_1, u_2, u_3 appartiennent à \mathbb{R}^3 .
 - ② Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Montrons qu'il existe un unique triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = au_1 + bu_2 + cu_3$. Pour cela, résolvons le système associé. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
 u = au_1 + bu_2 + cu_3 &\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + c = x \\ b + c = y \\ a + c = z \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + c = x \\ b + c = y \\ -2b = z - x \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x}{2} - y + \frac{z}{2} \\ c = -\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} \\ b = \frac{x}{2} - \frac{z}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc, le système admet une unique solution, c'est-à-dire qu'il existe un unique triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = au_1 + bu_2 + cu_3$.

Donc la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de \mathbb{R}^3 . ■

Exercice 13 – Méthode 11, Exemple 3.18. On considère les quatre vecteurs de \mathbb{R}^3 suivants : $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (0, 0, 3)$, $u_3 = (1, 2, 3)$ et $u_4 = (-2, -4, 1)$. Déterminer une base de $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Correction. Trouvons une base du sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

- Par construction, la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) engendre F . Cependant, ce n'est pas une famille libre (et donc pas une base) car, on peut remarquer par exemple que

$$u_3 = u_1 + u_2 \quad \text{et} \quad u_4 = -2u_1 + \frac{1}{3}u_2.$$

Si on ne le voit pas directement, on peut chercher quatre réels a, b, c, d non tous nuls tels que $au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = 0_{\mathbb{R}^3}$ en résolvant le système associé. Ceci montre également que

$$F = \text{Vect}(u_1, u_2)$$

et donc que la famille (u_1, u_2) engendre également F .

- Montrons que la famille (u_1, u_2) est libre. Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On a

$$\begin{array}{l} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{donc} \quad \begin{cases} \lambda_1 & = 0 \\ 2\lambda_1 & = 0 \\ & 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \\ \text{donc} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{array}$$

Donc, la famille (u_1, u_2) est une famille libre.

Finalement, la famille (u_1, u_2) est une base de F . ■

Exercice 14 – Méthode 12, Exemple 3.19. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et en déterminer une base.

1. $G_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$
2. $G_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0, x + 2y + 3z + 4t = 0\}$
3. $G_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = 3z\}$
4. $G_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = y + z = z + t = t + x = 0\}$

Correction.

1. Montrons que $G_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 et déterminons-en une base.

- **Première étape :** On détermine une famille génératrice de G_1 grâce à la Méthode 7 (4). L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec trois inconnues et une équation (Étape 1). Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$u \in G_1 \iff x - 2y = 0 \quad (\text{Étape 2})$$

On a une équation pour trois inconnues : on choisit une inconnue - par exemple x - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes - ici y et z .

$$u \in G_1 \iff x = 2y \quad (\text{Étape 3})$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u \in G_1 &\iff u = (2y, y, z) && (\text{Étape 4}) \\ &\iff u = y(2, 1, 0) + z(0, 0, 1) && (\text{Étape 5}) \\ &\iff u \in \text{Vect}((2, 1, 0), (0, 0, 1)) && (\text{Étape 6}) \end{aligned}$$

Donc, la famille

$$(u_1, u_2) = ((2, 1, 0), (0, 0, 1))$$

est génératrice de G_1 .

- **Deuxième étape :** On extrait une famille libre de la famille génératrice grâce à la Méthode 11. Montrons que la famille (u_1, u_2) est libre. Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On a

$$\begin{aligned} &\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{donc} &\quad \begin{cases} 2\lambda_1 &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \\ &\lambda_2 = 0 \end{cases} \\ \text{donc} &\quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

Donc, la famille (u_1, u_2) est une famille libre.

- Finalement, la famille $((2, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une base de G_1 .

2. Montrons que $G_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0, x + 2y + 3z + 4t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et déterminons-en une base.

- **Première étape :** On détermine une famille génératrice de G_2 grâce à la Méthode 7 (4). L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec quatre inconnues et deux équations (Étape 1). Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$u \in G_2 \iff (S) \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases} \quad (\text{Étape 2})$$

On a deux équations pour quatre inconnues : on choisit deux inconnues - par exemple x et y - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes - ici z et t à l'aide du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ 3y + 2z + 5t = 0 \end{cases} && L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\iff \begin{cases} x = -\frac{5}{3}z - \frac{2}{3}t \\ y = -\frac{2}{3}z - \frac{5}{3}t \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que

$$u \in G_2 \Leftrightarrow u = \left(-\frac{5}{3}z - \frac{2}{3}t, -\frac{2}{3}z - \frac{5}{3}t, z, t\right) \quad (\text{Étape 4})$$

$$\Leftrightarrow u = z\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0\right) + t\left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1\right) \quad (\text{Étape 5})$$

$$\Leftrightarrow u \in \text{Vect}\left(\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0\right), \left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1\right)\right) \quad (\text{Étape 6})$$

$$\Leftrightarrow u \in \text{Vect}\left((-5, -2, 3, 0), (-2, -5, 0, 3)\right) \quad (\text{Étape 6})$$

Donc, la famille

$$(u_1, u_2) = ((-5, -2, 3, 0), (-2, -5, 0, 3))$$

est génératrice de G_2 .

- **Deuxième étape :** On extrait une famille libre de la famille génératrice grâce à la Méthode 11. Montrons que la famille (u_1, u_2) est libre. Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On a

$$\begin{aligned} & \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^4} \\ \text{donc} \quad & \begin{cases} -5\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 - 5\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 = 0 \\ 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \\ \text{donc} \quad & \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

Donc, la famille (u_1, u_2) est une famille libre.

- Finalement, la famille $((-5, -2, 3, 0), (-2, -5, 0, 3))$ est une base de G_2 .

3. On montre de même que

$$\text{la famille } \left(2, 1, \frac{2}{3}\right) \text{ est une base de } G_3.$$

4. On montre de même que

$$\text{la famille } ((-1, 1, -1, 1)) \text{ est une base de } G_4.$$

■