Interrogation du 10/03/2025

NOM Prénom :

1. La fonction f suivante est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner la valeur de $f'(0)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ x^3 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

- Le taux d'accroissement en 0 à droite vaut :

$$\forall x>0, \quad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2\ln(x)-0}{x-0} = x\ln(x)$$

On en déduit, grâce aux croissances comparées que :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

Donc f est dérivable en 0 à droite et $f_d'(0)=0$

- Le taux d'accroissement en 0 à gauche vaut :

$$\forall x<0, \quad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^3-0}{x-0} = x^2$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

Donc f est dérivable en 0 à gauche et $f_g'(0)=0$

- Comme f est dérivable en 0 à gauche et à droite et que $f_d'(0)=f_g'(0)$

on en déduit que $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0}$ et $\boxed{f'(0)=0}$

Tournez la page ➔

2. La fonction racine carrée est-elle dérivable en 0 ? Justifier.

Le taux d'accroissement en 0 (à droite, le seul ayant un sens) vaut :

$$\forall x>0, \quad \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = +\infty$$

Donc la fonction racine carrée n'est $\boxed{\text{pas dérivable en 0.}}$

3. On considère une urne contenant 3 boules rouges (numérotées 1,2,3) et 2 boules jaunes (numérotées 4,5). On réalise 10 tirages **avec remise** dans cette urne. On note
   - Pour tout $k \in \{1,\dots,8\}$, X_k la variable aléatoire donnant le numéro obtenu au k-ième tirage.
   - R la variable aléatoire égale au nombre total de boules rouges obtenues.

   (a) Réaliser une simulation de X_1 et une simulation de R grâce à Python.

   (b) Écrire un programme Python qui permet de calculer et d'afficher la valeur empirique de l'espérance de la variable aléatoire X_1. Quelle est la valeur théorique de l'espérance de la variable aléatoire X_1 ?

```
[1] import numpy as np
[2] import numpy.random as rd
```

3(a) X_1 suit une loi uniforme sur $[\![1,5]\!]$ donc on simule un tirage grâce à la commande suivant

```
[3] rd.randint(1,6)
```

R suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(10, \frac{3}{5})$ donc on simule un tirage grâce à la commande suivante

```
[4] rd.binomial(10, 3/5)
```

(b) Pour trouver l'espérance empirique de X_1 :
- on simule un grand nombre de tirage

```
[5] X1 = rd.randint(1,6,1000)
```

- et on en calcule la moyenne et on l'affiche

```
[6] np.mean(X1)
```

Comme $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,5]\!])$, son espérance théorique vaut

$$E(X_1) = \frac{1+5}{2} = 3$$