TD 21 – Application de la Dérivabilité

Théorèmes sur les fonctions dérivables

Exercice 1 – IAF. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{R},\ \ \forall a,b \in]-\infty,k],\ \ 0 \leqslant \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^k(b-a).$$

Exercice 2 – Suites & IAF. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+\mathrm{e}^{-x})$. On considère également la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+$. *On ne demande pas de déterminer la valeur de α. On pourra appliquer le théorème de la bijection à la fonction $x \mapsto f(x) - x$.*
3. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que
$$\text{pour tout } x \geqslant 0,\ \ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$$
4. Montrer que
$$\forall (a,b) \in [0,+\infty[, \qquad |f(b)-f(a)| \leqslant \frac{1}{2}|b-a|.$$
5. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha|.$$
6. Démontrer par récurrence que,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n-\alpha| \leqslant \frac{\alpha}{2^n}.$$
7. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 – Suites & IAF, Avec moins d'accompagnement. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{u_n}}{\mathrm{e}^{u_n}+1}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0,1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]0,1$ tel que
$$\frac{\mathrm{e}^{\alpha}}{\mathrm{e}^{\alpha}+1} = \alpha.$$
3. Montrer que,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n-\alpha|.$$
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Exercice 4 – Monotonie d'une fonction. On considère la fonction f définie sur son intervalle de définition $\mathscr{D}_f$ par

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \qquad f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f (limites comprises).
2. En déduire l'allure de la courbe de f.

Exercice 5 – Extrema d'une fonction. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{4}x(x^2-12).$$

Déterminer les éventuels extrema de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 – Extrema d'une fonction. On considère la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad f(x) = 2x-3+\frac{2}{x-1}.$$

Déterminer les éventuels extrema de la fonction f sur $]1,+\infty$.

Convexité & Concavité

Exercice 7 – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = 4x\mathrm{e}^{-x}$$

1. Étudier les variations de f.
2. Étudier la convexité de f. Vérifier que f possède un point d'inflexion.
3. Tracer la courbe représentative de f et sa tangente au point d'inflexion. *On donne* $\mathrm{e}^{-1} \approx 0.368$ *et* $\mathrm{e}^{-2} \approx 0.135$.

Exercice 8 – Soit $h :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \qquad h(x) = \mathrm{e}^x - 2\ln(x+1)$$

1. Montrer que h est convexe sur $]-1,+\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x > -1$, $h(x) \geqslant 1-x$.

Exercice 9 – On considère la fonction $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall t > 0, \qquad g(t) = t^2 - t\ln(t)$$

Étudier la convexité de g. On précisera les éventuels points d'inflexion.

Exercice 10 – Ecricome 2006 S. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^{-x} \geqslant 1-x$$

Exercice 11 – Soit $f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad f(x) = \ln(\ln(x)).$$

1. Montrer que f est concave sur $]1,+\infty[$.
2. En déduire que,

$$\forall a,b \in]1,+\infty[, \qquad \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$$

Pour aller plus loin

Exercice 12 – Maths II (CCIP). Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction concave sur $]0,1[$ telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. Montrer que

$$\forall x \in [0,1],\ \forall n \geqslant 1, \qquad g\left(x\left(1-\frac{1}{n}\right)+(1-x)\frac{1}{n}\right) \geqslant xg\left(1-\frac{1}{n}\right)+(1-x)g\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 13 – EML S 2007. On considère l'application

$$f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que l'application f est continue sur $[0,+\infty[$.
2. On considère l'application

$$A : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto A(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$$

   (a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que,

$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}$$

   (b) Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et préciser $f'(0)$. *On admettra que*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

   (c) Dresser le tableau de variations de A.
   (d) En déduire que f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.
   (e) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On considère l'application

$$B : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto B(x) = -\frac{3x^2+2x}{(x+1)^2} + 2\ln(1+x)$$

   (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et que,

$$\forall x > 0, \qquad f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}.$$

   (b) Dresser le tableau de variations de B.
   (c) En déduire que f est convexe sur $]0,+\infty[$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 14 – IAF pour l'étude d'une série. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = -\frac{1}{x},$$

et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$.
   (a) Montrer que

$$\forall x \in [k-1,k], \qquad \frac{1}{k^2} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{(k-1)^2}.$$

   (b) En déduire un encadrement de $f(k) - f(k-1)$.
3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2, \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant f(n) - f(1).$$

4. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 15 – On lance un dé deux fois de manière indépendante. On note, pour tout $i \in \{1,\ldots,6\}$, p_i la probabilité d'obtenir le numéro i lors d'un lancer. Montrer que c'est avec un dé non pipé (c'est-à-dire avec $p_1 = \cdots = p_6 = 1/6$) que la probabilité d'avoir un double est minimale. *On pourra utiliser la propriété suivante.*

Soit f une fonction convexe sur I. Alors, pour tout n-uplet $(x_1,\ldots,x_n)$ de réels de I et pour tout n-uplet $(t_1,\ldots,t_n)$ de réels positifs tels que $t_1+\cdots+t_n = 1$, on a,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$$

Exercice 16 – Démontrer l'inégalité suivante :

$$\forall a,b \in \mathbb{R}, \qquad \frac{2e^a e^b}{e^a+e^b} \leqslant e^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{e^a+e^b}{2}$$

Exercice 17 – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |f(y)-f(x)| \leqslant |y-x|^2$$

Montrer que f est constante.