

TD 22 – APPLICATION DE LA DÉRIVABILITÉ

Théorèmes sur les fonctions dérivables

Exercice 1 – IAF. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall a, b \in]-\infty, k], \quad 0 \leq e^b - e^a \leq e^k(b-a).$$

Soit $k \in \mathbb{R}$. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f :]-\infty, k] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \exp(x) \end{aligned}$$

① La fonction f est dérivable sur $] -\infty, k]$ (et même sur $\mathbb{R} \dots$) et

$$\forall x \in]-\infty, k], \quad f'(x) = \exp(x)$$

② De plus, par positivité de la fonction exponentielle et par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on a

$$\forall x \in]-\infty, k], \quad 0 \leq f'(x) \leq \exp(k)$$

Donc, d'après l'**inégalité des accroissements finis**, on a,

$$\forall a, b \in]-\infty, k], \quad 0(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq \exp(k)(b-a)$$

c'est-à-dire,

$$\forall a, b \in]-\infty, k], \quad 0 \leq e^b - e^a \leq e^k(b-a)$$

Exercice 2 – Suites & IAF. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$. On considère également la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

Montrons par **récurrence** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante est vraie

$$\mathcal{P}(n) : \ll u_n \geq 0 \gg.$$

• *Initialisation.* Montrons que la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_0 \geq 0.$$

D'après l'énoncé, $u_0 = 0 \geq 0$. Et donc, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_n \geq 0$$

On veut montrer que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{n+1} \geq 0$$

On sait que, par positivité de l'exponentielle

$$\begin{aligned} &\exp(-u_n) \geq 0 \\ \text{donc} \quad &1 + \exp(-u_n) \geq 1 \\ \text{donc} \quad &\ln(1 + \exp(-u_n)) \geq 0 \quad \text{par croissance de la fonction } x \mapsto \ln(x) \text{ sur }]0, +\infty[\\ \text{soit} \quad &u_{n+1} \geq 0 \quad \text{d'après l'énoncé} \end{aligned}$$

Donc la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, 2].$$

2. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+$. *On ne demande pas de déterminer la valeur de α . On pourra appliquer le théorème de la bijection à la fonction $x \mapsto f(x) - x$.*

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - x$$

On veut montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.

① La fonction g est définie sur l'**intervalle** $[0, +\infty[$.

② La fonction g est **continue** sur $[0, +\infty[$.

③ Montrons que la fonction g est **strictement décroissante** sur $[0, +\infty[$.

(P) La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g'(x) = -\frac{e^x + 2}{1 + e^x} \leq 0$$

(E) L'équation $g'(x) = 0$ admet aucune solution sur $[0, +\infty[$.

• (De plus, $g(0) = \ln(2)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$)

Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $] -\infty, \ln(2)]$, c'est-à-dire

$$\forall y \in] -\infty, \ln(2)], \exists ! x \in [0, +\infty[, y = g(x)$$

En particulier, en prenant $y = 0 \in] -\infty, \ln(2)]$, on obtient que

$$\exists ! \alpha \in [0, +\infty[, 0 = g(\alpha)$$

c'est-à-dire

$$\exists ! \alpha \in [0, +\infty[, f(\alpha) = \alpha$$

3. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\text{pour tout } x \geq 0, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

La fonction $x \mapsto 1 + e^{-x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + e^{-x} > 0$$

De plus, la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Donc, par composition, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{1}{1 + e^x}$$

et donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| = \frac{1}{1 + e^x}$$

Soit $x \in [0, +\infty[$. On a

$$\begin{array}{lll} & x \geq 0 & \\ \text{donc} & e^x \geq 1 & \text{car } x \mapsto \exp(x) \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \\ \text{donc} & 1 + e^x \geq 2 & \\ \text{donc} & \frac{1}{1 + e^x} \leq \frac{1}{2} & \text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur }]0, +\infty[\end{array}$$

Ainsi, on a montré que

$$\text{pour tout } x \geq 0, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

4. Montrer que

$$\forall (a, b) \in [0, +\infty[, |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a|.$$

On applique l'**inégalité des accroissements finis** à la fonction f car

① La fonction f est **dérivable** sur $[0, +\infty[$.

② Il existe $k = \frac{1}{2} \geq 0$ tel que pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $|f'(x)| \leq k$ (cf question précédente)

Donc,

$$\forall (a, b) \in [0, +\infty[, |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a|.$$

5. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

D'après la question précédente,

$$\forall (a, b) \in [0, +\infty[, |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En prenant $b = u_n$ et $a = \alpha$ dans l'inégalité précédente (car u_n et α appartiennent à $[0, +\infty[$), comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$, on obtient

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

6. Démontrer par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{2^n}.$$

Montrons par **récurrence** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante est vraie

$$\mathcal{P}(n) : « |u_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{2^n} ».$$

- *Initialisation.* Montrons que la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$|u_0 - \alpha| \leq \frac{\alpha}{2^0} = \alpha$$

D'après l'énoncé, $u_0 = 0$ donc $|u_0 - \alpha| = \alpha \leq \alpha$ (car par construction $\alpha \geq 0$) Et donc, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{2^n}$$

On veut montrer que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\alpha}{2^{n+1}}$$

On a

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha| &\leq \frac{1}{2} \times |u_n - \alpha| && \text{d'après la question précédente} \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{\alpha}{2^n} && \text{d'après l'H-R} \\ &\leq \frac{\alpha}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Donc la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{2^n}$$

7. En déduire la limite de la suite (u_n) .

D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{2^n}$$

Or, par propriété sur les suites géométriques, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \text{car} \quad -1 < \frac{1}{2} < 1.$$

Donc, par théorème des gendarmes, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$

Exercice 3 – Suites & IAF, Avec moins d'accompagnement. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0, 1]$.

2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]0, 1$ tel que

$$\frac{e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \alpha.$$

3. Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|.$$

4. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Exercice 4 – Monotonie d’une fonction. On considère la fonction f définie sur son intervalle de définition $\mathcal{D}_f$ par

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f (limites comprises).

La fonction f est définie, continue et dérivable sur $] -\infty, -2[$, $] -2, 2[$ et sur $] 2, +\infty[$ et

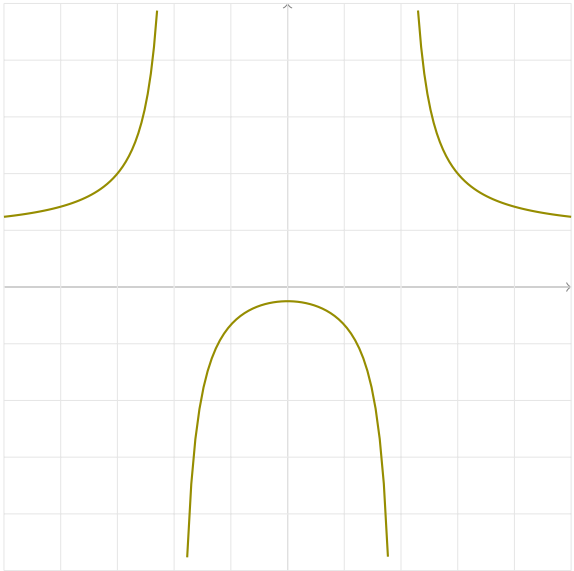
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, \quad f'(x) = -\frac{10x}{(x^2 - 4)^2}$$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$-$
f	1	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$	1

Pour les limites en $\pm\infty$, on lève l’indétermination grâce à la factorisation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, \quad f(x) = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}}$$

2. En déduire l’allure de la courbe de f .



Exercice 5 – Extrema d’une fonction. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{4}x(x^2 - 12).$$

Déterminer les éventuels extrema de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{3}{4}(x^2 - 4)$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\parallel$	$\parallel$	$-$
f	$-\infty$	4	-4	$+\infty$

- Pas de minimum global car $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- Pas de maximum global car $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Un maximum local qui vaut 4 atteint en $x = -2$
- Un minimum local qui vaut -4 atteint en $x = 2$



Exercice 6 – Extrema d’une fonction. On considère la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f(x) = 2x - 3 + \frac{2}{x-1}.$$

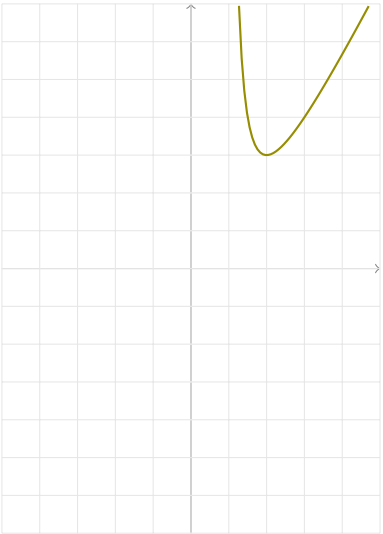
Déterminer les éventuels extrema de la fonction f sur $]1, +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$$

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	$+\infty$	3	$+\infty$

- Pas de maximum global car $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$
- Un minimum global qui vaut 3 atteint en $x = 2$



Convexité & Concavité

Exercice 7 – Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 4xe^{-x}$$

1. Étudier les variations de f .

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$) et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 4(1-x)e^{-x}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$4e^{-1}$	0

2. Étudier la convexité de f . Vérifier que f possède un point d’inflexion.

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

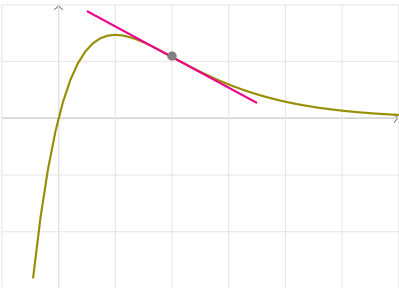
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = (4x-8)e^{-x}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

Donc f est concave sur $]-\infty, 2]$ puis convexe sur $[2, +\infty[$. Le point $(2, 8e^{-2})$ est un point d’inflexion pour la courbe représentative de f .

3. Tracer la courbe représentative de f et sa tangente au point d’inflexion. On donne $e^{-1} \approx 0.368$ et $e^{-2} \approx 0.135$.

La tangente à la courbe de f au point d’abscisse 2 a pour coefficient directeur $f'(2) = -4e^{-2} \approx -0.54$. Au point d’inflexion, la tangente «traverse» la courbe.



Exercice 8 – Soit $h :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad h(x) = e^x - 2\ln(x+1)$$

1. Montrer que h est convexe sur $] - 1, +\infty[$.

- La fonction $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc à fortiori de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] - 1, +\infty[$.
- La fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] - 1, +\infty[$ (car pour tout $x \in] - 1, +\infty[$, $x+1 > 0$) donc à fortiori de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] - 1, +\infty[$.

Donc, par opérations, la fonction h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] - 1, +\infty[$ et

$$\forall x > -1, \quad h'(x) = e^x - \frac{2}{x+1}$$

puis,

$$\forall x > -1, \quad h''(x) = e^x + \frac{2}{(x+1)^2}$$

Donc, on remarque que

$$\forall x > -1, \quad h''(x) \geq 0.$$

Donc la fonction h est convexe sur $] - 1, +\infty[$

2. En déduire que pour tout $x > -1$, $h(x) \geq 1 - x$.

Comme la fonction h est convexe sur $] - 1, +\infty[$, sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier, au dessus de sa tangente en 0 dont l'équation est donnée par

$$y = h'(0)(x-0) + h(0) \quad \text{c-à-d} \quad y = -x + 1$$

Donc, on en déduit que

$$\forall x > -1, \quad h(x) \geq -x + 1$$

Exercice 9 – On considère la fonction $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall t > 0, \quad g(t) = t^2 - t \ln(t)$$

Étudier la convexité de g . On précisera les éventuels points d'inflexion.

- Les fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto t$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) donc à fortiori de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.
- La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ donc à fortiori de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

Donc, par opérations, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall t > 0, \quad g'(t) = 2t - (\ln(t) + t \times \frac{1}{t}) = 2t - 1 - \ln(t)$$

puis,

$$\forall t > 0, \quad g''(t) = 2 - \frac{1}{t} = \frac{2t-1}{t}$$

On peut aller dresser le tableau de signe de g'' pour étudier la convexité de g .

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g''(x)$		-	+

On en déduit que

- la fonction g est concave sur $]0, \frac{1}{2}]$,
- la fonction g est convexe sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$,
- la fonction g admet un point d'inflexion en $\frac{1}{2}$.

Exercice 10 – Ecricome 2006 S. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} \geq 1 - x$$

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x}$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -e^{-x}$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = e^{-x} \geq 0$$

Donc la fonction f est concave sur $\mathbb{R}$. Donc sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier, au dessus de sa tangente en 0 dont l'équation est donnée par

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \quad \text{c-à-d} \quad y = -x + 1$$

Donc, on en déduit que

$$\forall x > -1, \quad f(x) \geq -x + 1$$

c'est-à-dire

$$\forall x > -1, \quad e^{-x} \geq 1 - x.$$

Exercice 11 – Soit $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f(x) = \ln(\ln(x)).$$

1. Montrer que f est concave sur $]1, +\infty[$.

2. En déduire que,

$$\forall a, b \in]1, +\infty[, \quad \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$$

Pour aller plus loin

Exercice 12 – Maths II (CCIP). Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave sur $]0, 1[$ telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. Montrer que

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \geq 1, \quad g\left(x\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (1-x)\frac{1}{n}\right) \geq xg\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (1-x)g\left(\frac{1}{n}\right).$$

La fonction g est concave sur $[0, 1]$. Donc,

$$\forall u, v \in [0, 1], \forall x \in [0, 1], \quad g(xu + (1-x)v) \geq xg(u) + (1-x)g(v).$$

Soient $x \in [0, 1]$ et $n \geq 1$. Prenons

$$u = 1 - \frac{1}{n} \in [0, 1] \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{n} \in [0, 1]$$

donc l'inégalité précédente. On obtient alors directement que

$$g\left(x\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (1-x)\frac{1}{n}\right) \geq xg\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (1-x)g\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 13 – EML S 2007. On considère l'application

$$f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que l'application f est continue sur $[0, +\infty[$.

- **Étude de la continuité de f sur $]0, +\infty[$.** La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $] -1, +\infty[$ donc à fortiori sur $]0, +\infty[$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ donc, en particulier sur $]0, +\infty[$. Donc, par produit la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.
- **Étude de la continuité de f en 0.** Il reste à étudier la continuité en 0. D'une part,

$$f(0) = 1$$

D'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x-0} = \frac{1}{1+0} = 1,$$

en utilisant le fait que la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable en 0 donc que son taux d'accroissement en 0 tend vers la valeur de sa dérivée en 0. Finalement, on a montré que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Donc f est également continue en 0.

2. On considère l'application

$$A : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto A(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$$

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que,

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}$$

En raisonnant comme à la question 1, on obtient, par opérations que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. De plus, sa dérivée est donnée par

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{x \times \frac{1}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{A(x)}{x^2}$$

(b) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et préciser $f'(0)$. On admettra que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Comme on a déjà montré à la question 2(a) que f était de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, il s'agit juste ici d'étudier la dérivabilité en 0. On a

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

On en déduit donc que,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}.$$

Le taux d'accroissement de f en 0 admet une limite finie (qui vaut $-1/2$), donc f est dérivable en 0 et

$$f'(0) = -\frac{1}{2}.$$

(c) Dresser le tableau de variations de A .

La fonction A est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ (en particulier car pour tout $x \in [0, +\infty[$, $x+1 \neq 0$ et $1+x > 0$). De plus, sa dérivée est donnée par

$$\forall x \geq 0, \quad A'(x) = \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{(1+x)^2}$$

Donc, on peut en déduire le tableau de signe de A' puis le tableau de variations de A de la manière suivante.

x	0	$+\infty$
$A'(x)$	$\vdots$ 0 $\vdots$	—
A	0	$-\infty$

Dans le tableau de variations de A , on a rajouté la valeur $A(0) = 0$ et la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} - \ln(1+x) = 0 - \infty = -\infty$$

(d) En déduire que f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Comme $A(0) = 0$ et que A est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ (cf question 2(c)), on en déduit que

$$\forall x > 0, \quad A(x) < 0.$$

On en déduit, grâce à la question 2(a), que

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{A(x)}{x^2} < 0.$$

Donc f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

(e) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Remarquons d'abord que

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{x}$$

Or, par composition et produit de limites, on obtient directement que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x} = 0 \times 0 = 0$$

De plus, par croissances comparées, on obtient que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Donc, finalement, par somme, on obtient que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

3. On considère l'application

$$B : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto B(x) = -\frac{3x^2 + 2x}{(x+1)^2} + 2\ln(1+x)$$

(a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et que,

$$\forall x > 0, \quad f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}$$

En raisonnant comme à la question 1, on montre que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Et on a déjà calculé à la question 2(a) que

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}$$

Donc, en dérivant cette égalité (la fonction A étant aussi dérivable sur $]0, +\infty[$), on obtient que,

$$\forall x > 0, \quad f''(x) = \frac{x^2 A'(x) - 2xA(x)}{x^4}$$

Or, en utilisant le calcul de A' effectué à la question 2(c), on obtient

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad x^2 A'(x) - 2xA(x) &= -\frac{x^3}{(1+x)^2} - 2x \left(\frac{x}{x+1} - \ln(1+x) \right) \\ &= \frac{-x^3 - 2x^2(1+x)}{(1+x)^2} + 2x \ln(1+x) \\ &= \frac{-3x^3 - 2x^2}{(1+x)^2} + 2x \ln(1+x) \\ &= xB(x) \end{aligned}$$

Finalement, on obtient que

$$\forall x > 0, \quad f''(x) = \frac{xB(x)}{x^4} = \frac{B(x)}{x^3}$$

(b) Dresser le tableau de variations de B .

La fonction B est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. De plus, après des calculs non détaillées, sa dérivée est donnée par

$$\forall x \geq 0, \quad B'(x) = \frac{2x^2}{(1+x)^3}$$

Donc, on peut en déduire le tableau de signe de B' puis le tableau de variations de B de la manière suivante.

x	0	$+\infty$
$B'(x)$	0	+
B	0	$+\infty$

(c) En déduire que f est convexe sur $]0, +\infty[$.

Comme $B(0) = 0$ et que B est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (cf question 3(b)), on en déduit que

$$\forall x > 0, \quad B(x) > 0.$$

On en déduit, grâce à la question 3(a), que

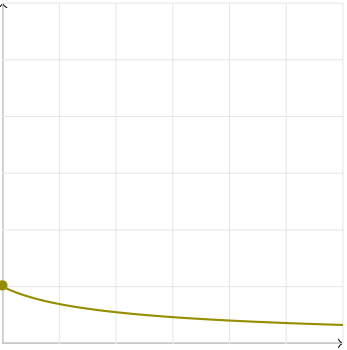
$$\forall x > 0, \quad f''(x) = \frac{B(x)}{x^3} > 0.$$

Donc f est convexe sur $]0, +\infty[$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

On doit faire apparaître sur le graphe de cette fonction :

- que cette fonction est convexe,
- qu'elle vaut 1 en 0,
- qu'elle tend vers 0 en $+\infty$.



Exercice 14 – IAF pour l'étude d'une série. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = -\frac{1}{x},$$

et la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Soit $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$.

(a) Montrer que

$$\forall x \in [k-1, k], \quad \frac{1}{k^2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{(k-1)^2}.$$

(b) En déduire un encadrement de $f(k) - f(k-1)$.

3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \quad \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq f(n) - f(1).$$

4. En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 15 – On lance un dé deux fois de manière indépendante. On note, pour tout $i \in \{1, \dots, 6\}$, p_i la probabilité d'obtenir le numéro i lors d'un lancer. Montrer que c'est avec un dé non pipé (c'est-à-dire avec $p_1 = \dots = p_6 = 1/6$) que la probabilité d'avoir un double est minimale. *On pourra utiliser la propriété suivante.*

Soit f une fonction convexe sur I . Alors, pour tout n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$ de réels de I et pour tout n -uplet $(t_1, \dots, t_n)$ de réels positifs tels que $t_1 + \dots + t_n = 1$, on a,

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$$

Exercice 16 – Démontrer l'inégalité suivante :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \frac{2e^a e^b}{e^a + e^b} \leq e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$$

Exercice 17 – Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(y) - f(x)| \leq |y - x|^2$$

Montrer que f est constante.