TD 00 – Équations & inéquations

Questions de cours

Exercice 1 – Vrai/Faux autour du cours. Indiquer si les affirmations qui suivent sont vraies ou fausses. Lorsqu'elles sont fausses, on exhibera un contre-exemple.

1. Soit $c \neq 0$. L'équation $cx + d = 0$ admet une unique solution donnée par $x = -\frac{d}{c}$.

☑ Vrai ☐ Faux

Soit x dans $\mathbb{R}$.
$cx + d = 0 \iff cx = -d$
$\iff x = -\frac{d}{c}$ (licite car $c \neq 0$)

2. Une équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet toujours au moins une solution réelle.

☐ Vrai ☑ Faux

Contre-exemple : Considérons l'équation $x^2 + 1 = 0$.
- On calcule le discriminant :
$\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 1 = -4$
- Comme $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution réelle.

3. Multiplier une inégalité par un nombre réel ne change pas le sens de l'inégalité.

☐ Vrai ☑ Faux

- Si $a > 0$, multiplier par a une inégalité ne change pas le signe.
- Par contre, si $a < 0$, multiplier par a une inégalité change le signe.

Contre-exemple :
$1 < 2$ pourtant $-1 = 1 \times (-1) > 2 \times (-1) = -2$

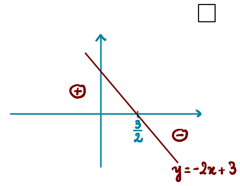
4. Le tableau de signe suivant est juste.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x+3$		$+$	0	$-$	

Résoudre $\frac{x}{y} = 0$
$\iff y \times \frac{x}{y} = y \times 0$
$\iff x = 0$

☑ Vrai ☐ Faux

- Soit x dans $\mathbb{R}$:
$-2x + 3 = 0 \iff -2x = -3$
$\iff 2x = 3$
$\iff x = \frac{3}{2}$

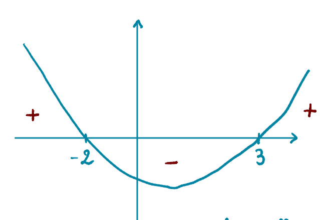


5. Le tableau de signe suivant est juste.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
x^2-x-6		$-$	0	$+$	0	$-$	

☐ Vrai ☑ Faux

- Résolvons d'abord l'équation $x^2 - x - 6 = 0$.
  * On calcule le discriminant
  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$
  * Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles :
  $x_1 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$
  et
  $x_2 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2} = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$



(car le coefficient devant x^2 est > 0)

Exercices

Exercice 2 – Équation du premier degré. Résoudre les équations suivantes.

1. $7x+3=-2$
2. $\sqrt{3}x+6=5$

1. Soit x dans $\mathbb{R}$.

$$7x+3=-2 \iff 7x=-2-3 \iff 7x=-5 \iff x=-\frac{5}{7}$$

Donc l'équation $7x+3=-2$ admet une unique solution donnée par

$$x=-\frac{5}{7}.$$

▸ Vérification :
$7\times\left(-\frac{5}{7}\right)+3=-5+3=-2$ ✓

2. Soit x dans $\mathbb{R}$.

$$\sqrt{3}x+6=5 \iff \sqrt{3}x=5-6 \iff \sqrt{3}x=-1 \iff x=-\frac{1}{\sqrt{3}} \iff x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Donc l'équation $\sqrt{3}x+6=5$ admet une unique solution donnée par

$$x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

▸ Vérification :
$\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+6=-\frac{3}{3}+6=-1+6=5$ ✓

Exercice 3 – Équation du second degré. Résoudre les équations suivantes.

1. $-5x^2-11x-2=0$
2. $-4x^2+12x-9=0$
3. $-x^2+2\sqrt{2}x+6=0$
4. $2x^2-4\sqrt{5}x+11=0$

1. Résoudre $-5x^2-11x-2=0$.

* On calcule le discriminant :

$$\Delta=(-11)^2-4\times(-5)\times(-2)=121-40=81$$

* Comme $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions réelles données par

$$x_1=\frac{11+\sqrt{81}}{2\times(-5)}=-\frac{11+9}{10}=-\frac{20}{10}=-2$$

et $$x_2=\frac{11-\sqrt{81}}{2\times(-5)}=-\frac{11-9}{10}=-\frac{2}{10}=-\frac{1}{5}$$

▸ Vérification :
$-5\times(-2)^2-11\times(-2)-2=-5\times4+22-2=-20+22-2=0$ ✓
$-5\times\left(-\frac{1}{5}\right)^2-11\times\left(-\frac{1}{5}\right)-2=-\frac{1}{5}+\frac{11}{5}-2=\frac{-1+11-10}{5}=0$ ✓

2. Résoudre $-4x^2+12x-9=0$

* On calcule le discriminant :

$$\Delta=12^2-4\times(-4)\times(-9)=144-16\times9=144-144=0$$

16
× 9
144

* Comme $\Delta=0$, l'équation admet une unique solution donnée par

$$x_0=\frac{-12}{2\times(-4)}=\frac{4\times3}{4\times2}=\frac{3}{2}$$

▸ Vérification :
$-4\times\left(\frac{3}{2}\right)^2+12\times\frac{3}{2}-9=-4\times\frac{9}{4}+6\times3-9=-9+18-9=0$ ✓

3. Résoudre $-x^2+2\sqrt{2}x+6=0$

* On calcule le discriminant :

$$\Delta=(2\sqrt{2})^2-4\times(-1)\times6=4\times2+4\times6=8+24=32$$

* Comme $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions réelles, données par

$$x_1=\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{32}}{2\times(-1)}=\frac{-2\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{-2}=\frac{2\sqrt{2}}{-2}=-\sqrt{2}$$

$$\sqrt{32}=\sqrt{2\times16}=\sqrt{2\times4^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{4^2}=4\sqrt{2}$$

et $$x_2=\frac{-2\sqrt{2}-\sqrt{32}}{-2}=\frac{-2\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{-2}=\frac{-6\sqrt{2}}{-2}=3\sqrt{2}$$

▸ Vérification :
$-(-\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})+6=-2-2\times2+6=0$ ✓
et $-(3\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}+6=-9\times2+6\times2+6=-18+12+6=0$ ✓

4. Résoudre $2x^2-4\sqrt{5}x+11=0$.

* On calcule le discriminant :

$$\Delta=(-4\sqrt{5})^2-4\times2\times11=16\times5-8\times11=80-88=-8$$

16
× 5
80

* Comme $\Delta<0$, l'équation n'admet pas de solution réelle.

Exercice 4 – Équation avec des fractions. Résoudre les équations suivantes.

* indication à donner ?

1. $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{2x-5}{x-1}$
2. $\dfrac{4}{x-4} = \dfrac{40}{x^2-16} - 1$

1. Résoudre l'équation $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{2x-5}{x-1}$.

* Les valeurs interdites sont les réels x tels que : $x+1=0$ et $x-1=0$, c'est-à-dire $x=-1$ et $x=1$.

* Soit x un nombre réel différent de 1 et -1.

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{2x-5}{x-1} \iff (x-1)\cdot(x-1) = (2x-5)(x+1)$$
$$\iff x^2 - x - x + 1 = 2x^2 + 2x - 5x - 5$$
$$\iff x^2 - 2x + 1 = 2x^2 - 3x - 5$$
$$\iff x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + 3x + 5 = 0$$
$$\iff -x^2 + x + 6 = 0$$

* On résout l'équation $-x^2+x+6=0$.
  . On calcule le discriminant :
$$\Delta = 1^2 - 4\times(-1)\times 6 = 1 + 24 = 25$$
  . Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles, données par
$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{25}}{2\times(-1)} = \frac{-1+5}{-2} = \frac{4}{-2} = -2$$
et
$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\times(-1)} = \frac{-1-5}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Conclusion : Comme les valeurs trouvées ne sont pas des valeurs interdites, on en déduit que l'ensemble des solutions est donné par :
$$\mathcal{S} = \{-2\,,\,3\}$$

▶ Vérification :

$\dfrac{-2-1}{-2+1} = \dfrac{-3}{-1} = 3$ et $\dfrac{2\times(-2)-5}{-2-1} = \dfrac{-4-5}{-3} = \dfrac{-9}{-3} = 3$ ✓

$\dfrac{3-1}{3+1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{2\times 3-5}{3-1} = \dfrac{6-5}{2} = \dfrac{1}{2}$ ✓

2. Résoudre l'équation $\dfrac{4}{x-4} = \dfrac{40}{x^2-16} - 1$

* Les valeurs interdites sont les réels x tels que : $x-4=0$ et $x^2-16=0$, c'est-à-dire $x=4$ et $x=-4$.

* Soit x un nombre réel différent de 4 et -4.

$$\frac{4}{x-4} = \frac{40}{x^2-16} - 1 \iff \frac{4}{x-4} = \frac{40-(x^2-16)}{x^2-16} = \frac{56-x^2}{x^2-16}$$
$$\iff 4\cdot(x^2-16) = (56-x^2)(x-4)$$
$$\iff 4\cdot(\cancel{x-4})(x+4) = (56-x^2)(\cancel{x-4})$$
$$\iff 4(x+4) = 56 - x^2$$
$$\iff 4x + 16 = 56 - x^2$$
$$\iff 4x + 16 - 56 + x^2 = 0$$
$$\iff x^2 + 4x - 40 = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{r} {}^{2}56 \\ \times\ 4 \\ \hline 224 \end{array}}$$

* On résout l'équation $x^2+4x-40=0$
  . On calcule le discriminant :
$$\Delta = 4^2 - 4\times 1\times(-40) = 16 + 160 = 176$$
  . Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles, données par
$$x_1 = \frac{-4+\sqrt{176}}{2} = \frac{-4+4\sqrt{11}}{2} = -2+2\sqrt{11}$$
et
$$x_2 = \frac{-4-\sqrt{176}}{2} = \frac{-4-4\sqrt{11}}{2} = -2-2\sqrt{11}$$

$$\boxed{\sqrt{176} = \sqrt{4\times 44} = \sqrt{4^2\times 11} = 4\sqrt{11}}$$

Conclusion : Comme les valeurs trouvées ne sont pas des valeurs interdites, on en déduit que l'ensemble des solutions est donné par :
$$\mathcal{S} = \{-2+2\sqrt{11}\,,\,-2-2\sqrt{11}\}$$

▶ Vérification : (...)

$$176 = 2\times 88 = 2\times 2\times 44 = 2^2\times 44 = 2^2\times 2\times 22 = 2^2\times 2\times 2\times 11 = 4\times 4\times 11 = 4^2\times 11$$

Exercice 5 – Tableaux de signe. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $3x+7 \leqslant 12$
2. $5x^2-4x+12<0$
3. $0<3x^2-5x+2$
4. $-x^2+3x-5 \geqslant -9$

1. Résolution de $3x+7 \leq 12$.

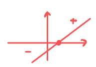
* Pas de valeurs interdites.
* On passe tout à gauche :

$3x+7 \leq 12 \iff 3x+7-12 \leq 0$

$\iff 3x-5 \leq 0$

* On dresse le tableau de signe :

$3x-5=0 \iff x=\frac{5}{3}$



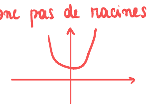
x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x-5$		$-$	0	$+$	

* L'ensemble des solutions est donc :

$\mathcal{S} =]-\infty, \frac{5}{3}]$

2. Résolution de $5x^2-4x+12<0$.

$5x^2-4x+12=0$
$\Delta = 4^2-4\times5\times12$
$= 16-240$
$= -224$
<0
donc pas de racines



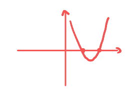
* Pas de valeurs interdites.
* Tout est déjà à gauche.
* On dresse le tableau de signe

x	$-\infty$		$+\infty$
$5x^2-4x+12$		$+$	

* Donc l'inéquation n'admet pas de solutions.

3. Résolution de $3x^2-5x+2>0$.

$3x^2-5x+2=0$
$\Delta = (-5)^2-4\times3\times2$
$= 25-24$
$= 1 > 0$
donc deux racines réelles :
$x_1 = \frac{5+\sqrt{1}}{2\times3} = \frac{5+1}{6} = \frac{6}{6} = 1$
$x_2 = \frac{5-\sqrt{1}}{2\times3} = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$



* Pas de valeurs interdites
* Tout est déjà à gauche
* On dresse le tableau de signe

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2-5x+2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

* Donc l'ensemble des solutions est donné par

$\mathcal{S} =]-\infty, \frac{2}{3}[\cup]1, +\infty[$

4. Résolution de $-x^2+3x-5 \geq -9$.

* Pas de valeurs interdites.
* On passe tout à gauche :

$-x^2+3x-5 \geq -9 \iff -x^2+3x-5+9 \geq 0$

$\iff -x^2+3x+4 \geq 0$

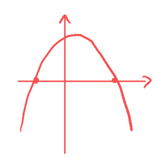
* On dresse le tableau de signe :

$-x^2+3x+4=0$
$\Delta = 3^2-4\times(-1)\times4$
$= 9+16$
$= 25$
>0
donc deux racines réelles
$x_1 = \frac{-3+\sqrt{25}}{2\times(-1)} = \frac{-3+5}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$
$x_2 = \frac{-3-\sqrt{25}}{2\times(-1)} = \frac{-3-5}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$-x^2+3x+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

* Donc l'ensemble des solutions est donné par

$\mathcal{S} = [-1, 4]$



Exercice 6 – Inéquations. Résoudre les inéquations suivantes.

$\star$ indications : $\sqrt{169} = 13$, $\sqrt{2} \simeq 1{,}41\ldots$, en tout cas, $\sqrt{2} \leq 2$

1. $\dfrac{2x-1}{x-5} > \dfrac{-x-1}{2x+3}$ $\star$

2. $\dfrac{1}{x^2-9} + \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{3}{x+3} \leqslant 1$

$\star\star$ indications : $\dfrac{5-\sqrt{53}}{2} \simeq -1{,}14\ldots$ et $\dfrac{5+\sqrt{53}}{2} \simeq 6{,}14$

1. Résoudre $\dfrac{2x-1}{x-5} > \dfrac{-x-1}{2x+3}$.

$\star$ Les valeurs interdites sont les réels x tels que

$x-5=0$ et $2x+3=0$

c'est-à-dire $x=5$ et $x=-\frac{3}{2}$.

$\star$ On passe tout à gauche :

$$\frac{2x-1}{x-5} > \frac{-x-1}{2x+3} \iff \frac{2x-1}{x-5} + \frac{x+1}{2x+3} > 0$$

$\star$ On met sous la forme d'une unique fraction :

$$\frac{2x-1}{x-5} > \frac{-x-1}{2x+3} \iff \frac{(2x-1)(2x+3)+(x+1)(x-5)}{(x-5)(2x+3)} > 0$$

$$\iff \frac{4x^2+6x-2x-3+x^2-5x+x-5}{2x^2+3x-10x-15} > 0$$

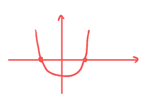
$$\iff \frac{5x^2-8}{2x^2-7x-15} > 0$$

$\star$ On dresse le tableau de signe :

• $5x^2-8=0 \iff x^2=\frac{8}{5}$

$\iff x=\sqrt{\frac{8}{5}}$ ou $x=-\sqrt{\frac{8}{5}}$

	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$-\sqrt{\frac{8}{5}}$		$-\sqrt{\frac{8}{5}}$		5		$+\infty$
$5x^2-8$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2-7x-15$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{5x^2-8}{2x^2-7x-15}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	



• $2x^2-7x-15=0$

$\Delta = (-7)^2 - 4\times 2\times(-15)$

$= 49+120$

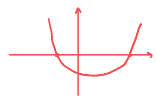
$= 169$

> 0

donc deux racines réelles

$x_1 = \frac{7+\sqrt{169}}{2\times 2} = \frac{7+13}{4} = \frac{20}{4} = 5$

$x_2 = \frac{7-\sqrt{169}}{2\times 2} = \frac{7-13}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$



$\star$ L'ensemble des solutions est donc donné par

$$\mathcal{S} = \left]-\infty, -\tfrac{3}{2}\right[\cup \left]-\sqrt{\tfrac{8}{5}}, \sqrt{\tfrac{8}{5}}\right[\cup]5;+\infty[$$

2. Résoudre $\dfrac{1}{x^2-9} + \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{3}{x+3} \leqslant 1$

$\star$ Les valeurs interdites sont les réels x tels que

$x^2-9=0$, $x-3=0$ et $x+3=0$,

c'est-à-dire $x=3$ et $x=-3$.

$\star$ On passe tout à gauche :

$$\frac{1}{x^2-9} + \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+3} \leqslant 1 \iff \frac{1}{x^2-9} + \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+3} - 1 \leqslant 0$$

$\star$ On met sous la forme d'une unique fraction :

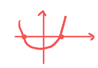
$$\frac{1}{x^2-9} + \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+3} \leqslant 1 \iff \frac{1+2(x+3)+3(x-3)-(x^2-9)}{x^2-9} \leqslant 0$$

$$\iff \frac{1+2x+6+3x-\cancel{9}-x^2+\cancel{9}}{x^2-9} \leqslant 0$$

$$\iff \frac{-x^2+5x+7}{x^2-9} \leqslant 0$$

$\star$ On dresse le tableau de signe :

• $x^2-9=0 \iff x=3$ ou $x=-3$



• $-x^2+5x+7=0$

$\Delta = 5^2 - 4\times(-1)\times 7$

$= 25+28$

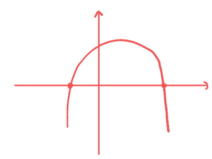
$= 53$

> 0

donc deux racines réelles

$x_1 = \frac{-5+\sqrt{53}}{2\times(-1)} = \frac{5-\sqrt{53}}{2}$

$x_2 = \frac{-5-\sqrt{53}}{2\times(-1)} = \frac{5+\sqrt{53}}{2}$



x	$-\infty$		-3		$\frac{5-\sqrt{53}}{2}$		3		$\frac{5+\sqrt{53}}{2}$		$+\infty$
$-x^2+5x+7$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x^2-9		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-x^2+5x+7}{x^2-9}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$\star$ Donc l'ensemble des solutions est donné par :

$$\mathcal{S} =]-\infty, -3[\cup \left[\frac{5-\sqrt{53}}{2}, 3\right[\cup \left[\frac{5+\sqrt{53}}{2}, +\infty\right[$$

Exercices approfondis

Exercice 7 – Trouver trois entiers naturels consécutifs tels que la somme de leurs carrés soit égale à 245.

- On cherche un entier naturel n tel que
$$\underbrace{n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2}_{\text{somme des carrés de trois entiers consécutifs}} = 245$$

- Puis on a :
$$\begin{aligned} n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 245 &\iff n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = 245 \\ &\iff 3n^2 + 6n + 5 = 245 \\ &\iff 3n^2 + 6n - 240 = 0 \\ &\iff n^2 + 2n - 80 = 0 \end{aligned}$$

- Résolution de $x^2 + 2x - 80 = 0$:
  - On calcule le discriminant :
$$\begin{aligned} \Delta &= 2^2 - 4 \times 1 \times (-80) \\ &= 4 + 320 \\ &= 324 \end{aligned}$$
  - Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles, données par
$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{324}}{2} = \frac{-2+18}{2} = \frac{16}{2} = 8$$
et $$x_2 = \frac{-2-\sqrt{324}}{2} = \frac{-2-18}{2} = \frac{-20}{2} = -10$$

- Comme on cherche un entier naturel comme solution, on garde uniquement 8 comme solution.

Conclusion : 8, 9 et 10 sont trois entiers consécutifs tels que la somme de leurs carrés soit égale à 245.

▶ Vérification :
$$\begin{aligned} 8^2 + 9^2 + 10^2 &= 64 + 81 + 100 \\ &= 145 + 100 \\ &= 245 \quad \checkmark \end{aligned}$$