Interrogation du 17/03/2025

NOM Prénom :

1. On considère les vecteurs u , u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que le vecteur u est une combinaison linéaire des vecteurs u_1 et u_2 .

2. On considère l'ensemble

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

3. On considère une urne contenant 5 boules rouges (numérotées 1,2,3,4,5) et 2 boules jaunes (numérotées 6,7). On réalise 15 tirages **avec remise** dans cette urne. On note
- X_1 la variable aléatoire donnant le numéro obtenu au 1-ième tirage.
 - R la variable aléatoire égale au nombre total de boules rouges obtenues lors de ces 15 tirages.
- (a) Réaliser une simulation de X_1 et une simulation de R grâce à Python.
- (b) Écrire un programme Python qui permet de calculer et d'afficher la valeur empirique de l'espérance de la variable aléatoire X_1 . Quelle est la valeur théorique de l'espérance de la variable aléatoire X_1 ?

1. Montrons que u est une combinaison linéaire de u_1 et u_2 .

On cherche donc deux scalaires $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$u = a \cdot u_1 + b \cdot u_2$$

sont $a, b \in \mathbb{R}$. Raisonnons par équivalence.

$$u = a \cdot u_1 + b \cdot u_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b \\ a + b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 2 \\ a + b = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 2 \\ -b = 1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}$$

Enfinement,

$$u = 4 \cdot u_1 - u_2$$

donc u est bien combinaison linéaire de u_1 et u_2 .

Vérification:

$$4 \cdot u_1 - u_2 = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= u \quad \checkmark$$

Tournez la page →

2. Montrons que

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x+y=0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

① $F \subset \mathbb{R}^2$

② $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in F$ car $0+0=0$

③ Soient

. $u = (x, y) \in F$ donc $x+y=0$ (*)

. $v = (x', y') \in F$ donc $x'+y'=0$ (**)

. $a, b \in \mathbb{R}$

Montrons que $a \cdot u + b \cdot v \in F$.

Déjà, on a :

$$\begin{aligned} a \cdot u + b \cdot v &= a \cdot (x, y) + b \cdot (x', y') \\ &= (ax, ay) + (bx', by') \\ &= (\underbrace{ax + bx'}_X, \underbrace{ay + by'}_Y) \end{aligned}$$

Montrer que $a \cdot u + b \cdot v \in F$ revient à montrer que $X+Y=0$

On

$$\begin{aligned} X+Y &= ax + bx' + ay + by' \\ &= a(x+y) + b(x'+y') \\ &= a \times 0 + b \times 0 \quad \text{en utilisant (*) et (**)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $a \cdot u + b \cdot v \in F$

```
[1] import numpy as np
[2] import numpy.random as rd
```

3(a) X_1 suit une loi uniforme sur $[[1, 7]]$ donc on simule un tirage grâce à la commande suivante

```
[3] rd.randint(1, 8)
```

R suit une loi binomiale $B(15, \frac{5}{7})$ donc on simule un tirage grâce à la commande suivante

```
[4] rd.binomial(15, 5/7)
```

(b) Pour trouver l'espérance empirique de X_1 :

. on simule un grand nombre de tirage

```
[5] X1 = rd.randint(1, 8, 1000)
```

. et on en calcule la moyenne et on l'affiche

```
[6] np.mean(X1)
```

Comme $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 7])$, son espérance théorique vaut

$$E(X_1) = \frac{1+7}{2} = 4$$