Interrogation du 24/03/2025

NOM Prénom :

1. On considère les vecteurs u_1, u_2 et u_3 de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre (dans $\mathbb{R}^3$).

Montrons que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels tels que

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Raisonnons par équivalence.

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_3 = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Donc la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

Tournez la page →

2. On considère les deux vecteurs v_1 et v_2 de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La famille (v_1, v_2) est-elle libre ?

On remarque que

$$v_2 = -2 \cdot v_1$$

Les deux vecteurs v_1 et v_2 sont colinéaires.

Donc la famille (v_1, v_2) est liée (non libre).

3. On considère l'ensemble

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$$

(a) Montrer que l'ensemble F peut s'écrire sous la forme

$$F = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$$

où w_1 et w_2 sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ à déterminer.

(b) En déduire une famille génératrice de l'ensemble F.

(a) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Raisonnons par équivalence.
(b)

$$\begin{aligned} u \in F &\iff x - y - z = 0 \\ &\iff x = y + z \\ &\iff u = \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff u = y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff u \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Donc

$$F = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= w_2} \right)$$

et la famille (w_1, w_2) est génératrice de F.