23

Calcul d'une primitive

- 1 Définition de la notion de primitive
- 2 Existence et non unicité
- 3 Calcul de primitive

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Pour bien démarrer

#1 - Savoir dériver.

Fonction	Dérivée	Valable sur
$x \mapsto k$ avec $k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
u^n	$nu' u^{n-1}$	Intervalles sur lesquels u est dérivable
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	Intervalles sur lesquels u est dérivable et ne s'annule pas
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}}$	Intervalles sur lesquels u est dérivable et strictement positive
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	Intervalles sur lesquels u est dérivable et ne s'annule pas
e^u	$u' e^u$	Intervalles sur lesquels u est dérivable

1 Définition de la notion de primitive

Définition 1.1 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On appelle **primitive de f sur I** toute fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- ① F est dérivable sur I ,
- ② Pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple 1.2 Montrons que la fonction $F : x \mapsto \frac{x^2}{2} + 5$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$.

- ① La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale.
- ② De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a,

$$F'(x) = \frac{1}{2} \times 2x + 0 = x = f(x).$$

Donc F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.3 Montrons que la fonction $F : x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.

- ① La fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit et somme de fonctions usuelles.
- ② De plus, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a,

$$F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) = f(x).$$

Donc F est bien une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

Exemple 1.4 Montrons que les fonctions $F_1 : x \mapsto x^2$ et $F_2 : x \mapsto x^2 + 1$ sont des primitives de la fonction $f : x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.

- ① Les fonctions F_1 et F_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que fonctions polynomiales.
- ② De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a,

$$F_1'(x) = 2x = f(x) \quad \text{et} \quad F_2'(x) = 2x + 0 = f(x)$$

Donc F_1 et F_2 sont bien des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

2 Existence et non unicité

Proposition 2.1 — Existence d'une primitive. Toute fonction **continue** sur un **intervalle** admet au moins une **primitive** sur cet intervalle.

- ! Il faut se placer sur un intervalle (un ensemble de $\mathbb{R}$ «sans trou») pour éviter les problèmes. En effet, si on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ (qui n'est donc pas un intervalle) par,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{1}{x},$$

alors,

- sur $]0, +\infty[$, f admet pour primitive $x \mapsto \ln(x)$,
- sur $] -\infty, 0[$, f admet pour primitive $x \mapsto \ln(-x)$.

Grâce à l'Exemple 1.4, on remarque qu'une même fonction peut admettre plusieurs primitives. Toutefois, ces primitives ne diffèrent que d'une constante. Ainsi, on ne dit jamais «la primitive» mais toujours «une primitive» car il en existe une *infinité* (il suffit d'ajouter une constante pour obtenir une nouvelle primitive).

Proposition 2.2 — Infinité de primitives. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Deux primitives F_1 et F_2 de f sur I sont égales à une **constante près**,

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, F_1(x) = F_2(x) + c.$$

- Autrement dit, si F est une primitive de f sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est donné par

$$\{x \mapsto F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple 2.3 L'ensemble des primitives de $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$ est donné par

$$\{x \mapsto x \ln(x) - x + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

Exemple 2.4 L'ensemble des primitives de $x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$ est donné par

$$\{x \mapsto x^2 + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

Proposition 2.5 — Unicité sous condition. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour tous $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant $F(x_0) = y_0$.

Exercice 2.6 Donner l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

La fonction $x \mapsto x \ln(x) - x + 1$ est la primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

Exercice 2.7 Donner l'unique primitive de la fonction $x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

La fonction $x \mapsto x^2$ est la primitive de la fonction $x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

3 Calcul de primitive

3.1 Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Une primitive	Valable sur
$x \mapsto k$ avec $k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto kx$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^\alpha$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	Dépend de α
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(x)$	$] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
$x \mapsto \exp(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{a} \exp(ax)$	$\mathbb{R}$

On peut vérifier qu'en dérivant la primitive donnée, on retrouve la fonction de base.

Exemple 3.1

Fonction	Une primitive	Valable sur	Fonction	Une primitive	Valable sur
$x \mapsto 1$	$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{x^3}$	$x \mapsto -\frac{1}{2x^2}$	$] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
$x \mapsto x$	$x \mapsto \frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto \frac{1}{3}x^3$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(x)$	$] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$	$x \mapsto e^{2x}$	$x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x}$	$] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$	$x \mapsto e^{-x}$	$x \mapsto -e^{-x}$	$\mathbb{R}$

Proposition 3.2 Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $F, G : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que F soit une primitive de f sur I et G soit une primitive de g sur I . Alors, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $aF + bG$ est une primitive de $af + bg$ sur I .

Grâce à la *linéarité* de la notion de primitive et à partir des primitives des fonctions usuelles, on peut alors trouver des primitives de fonctions plus compliquées.

Exemple 3.3

Fonction	Une primitive	Sur
$x \mapsto e^x - 5$	$x \mapsto e^x - 5x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 3x^2 - 5x + 3$	$x \mapsto x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$	$x \mapsto \ln(x) - \frac{2}{x}$	$] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
$x \mapsto e^{2x} - 4e^{-2x}$	$x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^{-2x}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{3x^3} + e^{-x}$	$x \mapsto -\frac{1}{6x^2} - e^{-x}$	$] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
$x \mapsto e^{2x} + \frac{1}{3}x$	$x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{6}x^2$	$\mathbb{R}$

3.2 Reconnaître la dérivée d'une composée

Fonction	Une primitive
$u' \exp(u)$	$\exp(u)$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$
$u' u^\alpha$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$

Exemple 3.4

Fonction	Calculs intermédiaires	Forme	Une primitive
$x \mapsto x \exp(x^2)$	$x \mapsto \frac{1}{2} \times 2x \exp(x^2)$	$\frac{1}{2} u' \exp(u)$	$x \mapsto \frac{1}{2} \exp(x^2)$
$x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$	$x \mapsto -\frac{-1}{(1-x)^2}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$x \mapsto \frac{1}{1-x}$
$x \mapsto (3x-5)^4$	$x \mapsto \frac{1}{3} \times 3(3x-5)^4$	$\frac{1}{3} \times u' u^4$	$x \mapsto \frac{1}{15} (3x-5)^5$
$x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$	$x \mapsto \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1+x^2}$	$\frac{1}{2} \times \frac{u'}{u}$	$x \mapsto \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
$x \mapsto \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$	$x \mapsto (2x+1) \times (x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}$	$u' u^{-\frac{1}{2}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x^2+x+1}$

3.3 Une astuce : décomposition en éléments simples

Exemple 3.5 On considère la fonction f définie par

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$$

1. Sur quel-s intervalle-s la fonction f admet-elle des primitives ?
2. Donner une écriture de f sous la forme d'une somme de fractions.
3. En déduire les primitives de f sur les intervalles correspondants.

1. La fonction f est **continue** sur les **intervalles** $] -\infty, -1[$, $] -1, 0[$ et $] 0, +\infty[$ donc elle admet des primitives sur chaque de ces intervalles.
2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. On a

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Sans le nommer ici, on fait une *décomposition en éléments simples* de la fonction f .

3. Grâce à la question précédente, on peut déterminer les primitives de f sur les intervalles correspondants.
 - Sur $] -\infty, -1[$. Les primitives de f sur $] -\infty, -1[$ sont de la forme

$$x \mapsto \ln(|x|) - \ln(|x+1|) + a \quad \text{avec } a \in \mathbb{R},$$
 c'est-à-dire de la forme

$$x \mapsto \ln(-x) - \ln(-x-1) + a \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}.$$
 - Sur $] -1, 0[$. Les primitives de f sur $] -1, 0[$ sont de la forme

$$x \mapsto \ln(-x) - \ln(x+1) + b \quad \text{avec } b \in \mathbb{R}.$$

- Sur $]0, +\infty[$. Les primitives de f sur $]0, +\infty[$ sont de la forme

$$x \mapsto \ln(x) - \ln(x+1) + c \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Attention, a priori, les constantes sur chaque intervalle ne sont pas les mêmes.

Exemple 3.6 On considère la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x}{x+1} \end{aligned}$$

Déterminer une primitive de f sur $] -1, +\infty[$.

- Tout d'abord, la fonction f est **continue** sur l'intervalle $] -1, +\infty[$ donc elle y admet une (des) primitives.
- Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On a

$$f(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Sans le nommer ici, on fait une *décomposition en éléments simples* de la fonction f .

- Une primitive de f sur $] -1, +\infty[$ est donnée par

$$x \mapsto x - \ln(|x+1|) \quad \text{c'est-à-dire} \quad x \mapsto x - \ln(x+1)$$

Exemple 3.7 On considère la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x}{3x-2} \end{aligned}$$

Déterminer une primitive de f sur $] -\infty, \frac{2}{3}[$.

- Tout d'abord, la fonction f est **continue** sur l'intervalle $] -\infty, \frac{2}{3}[$ donc elle y admet une (des) primitives.
- Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$. On a

$$f(x) = \frac{x}{3x-2} = \frac{1}{3} \frac{3x}{3x-2} = \frac{1}{3} \frac{3x-2+2}{3x-2} = \frac{1}{3} \left(\frac{3x-2}{3x-2} + \frac{2}{3x-2} \right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \frac{3}{3x-2}$$

Sans le nommer ici, on fait une *décomposition en éléments simples* de la fonction f .

- Une primitive de f sur $] -\infty, \frac{2}{3}[$ est donnée par

$$x \mapsto \frac{x}{3} + \frac{2}{9} \ln(|3x-2|) \quad \text{c'est-à-dire} \quad x \mapsto \frac{x}{3} + \frac{2}{9} \ln(-3x+2)$$