

TD 23 – CALCULS DE PRIMITIVES

Exercice 1 – Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes en précisant les intervalles de validité.

1. $x \mapsto 5$

5. $x \mapsto 2x$

2. $x \mapsto 3x^2$

6. $x \mapsto nx^{n-1}$ avec $n \in \mathbb{Z}$

3. $x \mapsto \frac{1}{x}$

7. $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4. $x \mapsto e^x$

8. $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 2 – Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes en précisant les intervalles de validité.

1. $x \mapsto x^2 - 3x + 5$

5. $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

9. $x \mapsto \sqrt{2x} + 3$

2. $x \mapsto \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$

6. $x \mapsto e^{3x} + e^{-5x} - 2e^{7x}$

10. $x \mapsto \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}$

3. $x \mapsto e^{-3x} + x^3 - 1$

7. $x \mapsto \frac{1}{e^{2x}}$

11. $x \mapsto \frac{8}{x\sqrt{x}}$

4. $x \mapsto \frac{1}{x} + x^2$

8. $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{2x}$

12. $x \mapsto x(x+2)^2$

Exercice 3 – Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes en précisant les intervalles de validité.

1. $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$

5. $x \mapsto \frac{x}{x-4}$

9. $x \mapsto (2x^2 - 3)^2$

2. $x \mapsto (x+1)e^{x^2+2x}$

6. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

10. $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^3}$

3. $x \mapsto \frac{x^2}{x^3+1}$

7. $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$

11. $x \mapsto \frac{e^x}{1-e^x}$

4. $x \mapsto e^x(2e^x - 3)^3$

8. $x \mapsto \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

12. $x \mapsto \frac{\ln(x)^2}{x}$

Exercice 4 – Donner l'ensemble des primitives de $f : x \mapsto \frac{x^3}{(x^4+1)^3}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 – Dans chaque cas, donner l'unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$ sur l'intervalle donné.

1. $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 7$ avec $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$ sur $\mathbb{R}$.

2. $f : x \mapsto \frac{1}{2}e^{3x} + 2x^4 - 1$ avec $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$ sur $\mathbb{R}$.

3. $f : x \mapsto e^{-x} + \frac{2}{x}$ avec $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 6 – On considère la fonction f définie sur $] -\infty, 1[$ par

$$\forall x < 1, \quad f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4x+3}$$

1. Justifier que f admette une primitive sur $] -\infty, 1[$.
2. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in] -\infty, 1[, \quad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3}.$$

3. En déduire une primitive de f sur $] -\infty, 1[$.

Exercice 7 – On considère la fonction g définie sur $I =]\frac{1}{2}, +\infty[$ par

$$\forall x > \frac{1}{2}, \quad g(x) = \frac{1}{4x^2-4x+1}$$

1. Justifier que g admette une primitive sur I .
2. Factoriser, pour $x \in \mathbb{R}$, $4x^2-4x+1$.
3. En déduire une primitive de g sur I .

Exercice 8 – Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$.