TD 23 – Calculs de Primitives (Correction)

Exercice 1 –

Question	Fonction	Une primitive	Valable sur
1.	$x \mapsto 5$	$x \mapsto 5x$	$\mathbb{R}$
2.	$x \mapsto 3x^2$	$x \mapsto x^3$	$\mathbb{R}$
3.	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(\lvert x \rvert)$	$]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
4.	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
5.	$x \mapsto 2x$	$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$
6.	$x \mapsto nx^{n-1}$ avec $n \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto x^n$	Dépend de n
7.	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
8.	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$	$x \mapsto x^\alpha$	Dépend de α

Exercice 2 –

Question	Fonction	Une primitive	Valable sur
1.	$x \mapsto x^2 - 3x + 5$	$x \mapsto \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x$	$\mathbb{R}$
2.	$x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4}$	$x \mapsto \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{20}$	$\mathbb{R}$
3.	$x \mapsto \mathrm{e}^{-3x} + x^3 - 1$	$x \mapsto -\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{3} + \frac{x^4}{4} - x$	$\mathbb{R}$
4.	$x \mapsto \dfrac{1}{x} + x^2$	$x \mapsto \ln(\lvert x\rvert) + \frac{x^3}{3}$	$]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$
5.	$x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$	$x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$
6.	$x \mapsto \mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-5x} - 2\mathrm{e}^{7x}$	$x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} - \frac{\mathrm{e}^{5x}}{5} - \frac{2\mathrm{e}^{7x}}{7}$	$\mathbb{R}$
7.	$x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}$	$x \mapsto -\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}$	$\mathbb{R}$
8.	$x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x}$	$x \mapsto \frac{1}{2}\ln(\lvert x\rvert)$	$]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$
9.	$x \mapsto \sqrt{2x} + 3$	$x \mapsto \frac{2\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}}{3} + 3x$	$[0,+\infty[$
10.	$x \mapsto \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x}$	$]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$
11.	$x \mapsto \dfrac{8}{x\sqrt{x}}$	$x \mapsto -\frac{16}{\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
12.	$x \mapsto x(x+2)^2$	$x \mapsto \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + 2x^2$	$\mathbb{R}$

Exercice 3 –

Question	Fonction	Une primitive	Valable sur
1.	$x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{2(1+x^2)}$	$\mathbb{R}$
2.	$x \mapsto (x+1)e^{x^2+2x}$	$x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2+2x}$	$\mathbb{R}$
3.	$x \mapsto \dfrac{x^2}{x^3+1}$	$x \mapsto \frac{1}{3}\ln(\|x^3+1\|)$	$]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$
4.	$x \mapsto e^x(2e^x-3)^3$	$x \mapsto \frac{1}{8}(2e^x-3)^4$	$\mathbb{R}$
5.	$x \mapsto \dfrac{x}{x-4}$	$x \mapsto x+4\ln(\|x-4\|)$	$]-\infty,4[$ et $]4,+\infty[$
6.	$x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$	$x \mapsto \frac{(\ln(x))^2}{2}$	$]0,+\infty[$
7.	$x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$	$x \mapsto \ln(\|\ln(x)\|)$	$]0,1[$ et $]1,+\infty[$
8.	$x \mapsto \dfrac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+3}}$	$x \mapsto 3\sqrt{x^2-4x+3}$	$]-\infty,1[$ et $]3,+\infty[$
9.	$x \mapsto (2x^2-3)^2$	$x \mapsto \frac{4}{5}x^5-4x^3+9x$	$\mathbb{R}$
10.	$x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^3}$	$x \mapsto -\frac{1}{2(x-1)^2}$	$]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$
11.	$x \mapsto \dfrac{e^x}{1-e^x}$	$x \mapsto \ln(\|1-e^x\|)$	$]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$
12.	$x \mapsto \dfrac{\ln(x)^2}{x}$	$x \mapsto \frac{(\ln(x))^3}{3}$	$]0,+\infty[$

Exercice 4 – Donner l'ensemble des primitives de $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{(x^4+1)^3}$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^3}{(x^4+1)^3} = \frac{1}{4}\frac{4x^3}{(x^4+1)^3} = \frac{1}{4}\frac{u'(x)}{u(x)^3} = \frac{1}{4}u'(x)u^{-3}(x). \qquad \text{avec} \qquad u(x) = x^4+1.$$

Donc <u>une</u> primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$x \mapsto \frac{1}{4}\frac{u(x)^{-3+1}}{-3+1} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x \mapsto -\frac{1}{8(x^4+1)^2}.$$

Donc <u>l'ensemble</u> des primitives de f sur $\mathbb{R}$ est donné par

$$\left\{x \mapsto -\frac{1}{8(x^4+1)^2} + c \mid c \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice 5 – Dans chaque cas, donner l'unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$ sur l'intervalle donné.

1. $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 7$ avec $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$ sur $\mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto \frac{1}{2}e^{3x} + 2x^4 - 1$ avec $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$ sur $\mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto e^{-x} + \frac{2}{x}$ avec $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$ sur $]0, +\infty[$.

1. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme
$$x \mapsto \frac{x^4}{4} - x^3 + 7x + c \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R}$$
Ainsi, <u>la</u> primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui vaut 2 en 1 est donnée par
$$x \mapsto \frac{x^4}{4} - x^3 + 7x - \frac{17}{4}.$$
2. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme
$$x \mapsto \frac{e^{3x}}{6} + \frac{2}{5}x^5 - x + c \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R}$$
Ainsi, <u>la</u> primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui vaut 0 en 0 est donnée par
$$x \mapsto \frac{e^{3x}}{6} + \frac{2}{5}x^5 - x - \frac{1}{6}$$
3. Les primitives de f sur $]0, +\infty[$ sont de la forme
$$x \mapsto -e^{-x} + 2\ln(|x|) + c \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R},$$
c'est-à-dire
$$x \mapsto -e^{-x} + 2\ln(x) + c \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$
Ainsi, <u>la</u> primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui vaut 1 en 1 est donnée par
$$x \mapsto -e^{-x} + 2\ln(x) + 1 + e^{-1}$$

Exercice 6 – On considère la fonction f définie sur $]-\infty,1[$ par

$$\forall x<1, \qquad f(x)=\frac{2x+1}{x^2-4x+3}$$

1. Justifier que f admette une primitive sur $]-\infty,1[$.
2. Déterminer $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x\in]-\infty,1[, \qquad f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-3}.$$

3. En déduire une primitive de f sur $]-\infty,1[$.

On trouve $a=-\frac{3}{2}$ et $b=\frac{7}{2}$. Sur $]-\infty,1[$, $x-1<0$ et $x-3<0$ donc une primitive de f sur $]-\infty,-1[$ est

$$F : x\mapsto -\frac{3}{2}\ln(|x-1|)+\frac{7}{2}\ln(|x-3|)=-\frac{3}{2}\ln(1-x)+\frac{7}{2}\ln(3-x)$$

Exercice 7 – On considère la fonction g définie sur $I = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par

$$\forall x > \frac{1}{2}, \qquad g(x) = \frac{1}{4x^2 - 4x + 1}$$

1. Justifier que g admette une primitive sur I.
2. Factoriser, pour $x \in \mathbb{R}$, $4x^2 - 4x + 1$.
3. En déduire une primitive de g sur I

On a,

$$\forall x \in I, \qquad g(x) = \frac{1}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{(2x-1)^2}$$

donc une primitive de g sur $]1/2, +\infty[$ est

$$G : x \mapsto -\frac{1}{2(2x-1)}$$

Exercice 8 – Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$. '