Devoir maison 4

- ***Obligatoire***. *À rendre pour le lundi 28 avril 2025.*
- *Les résultats finaux doivent être **encadrés.***

Exercice 1 – Bonus. Corriger votre copie du DS5.

Exercice 2 – Étude d'une suite grâce à l'inégalité des accroissements finis. On considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par:

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \ f(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln(x) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]0,+\infty[,\ \ g(x) = f(x) - x.$$

On considère aussi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = f(u_n) = 2 - \frac{1}{2}\ln(u_n)$$

Partie 1 - Étude de g

1. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to +\infty} g(x)$$

2. Dresser le tableau de variations de g sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que la fonction g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
4. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$, que l'on notera α.
5. Que vaut $g(\alpha)$ par construction ?
6. Justifier que

$$g(\mathrm{e}) \leqslant g(\alpha) \leqslant g(1)$$

   On pourra admettre que $3 - 2\mathrm{e} < 0$.
7. En déduire que $\alpha \in [1,\mathrm{e}]$.

Partie 2 - Étude de f

8. Justifier que $f(\alpha) = \alpha$.
9. Démontrer que

$$\forall x \in [1,\mathrm{e}], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

10. En déduire, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que,

$$\forall a,b \in [1,\mathrm{e}], \qquad |f(b) - f(a)| \leqslant \frac{1}{2}|b-a|$$

Partie 3 - Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

11. Démontrer par récurrence que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq \mathrm{e}.$$

12. À l'aide de la question 10, en déduire que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

13. Démontrer par récurrence que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \frac{\mathrm{e}-1}{2^n}.$$

14. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Partie 4 - Pyhton

15. Informatique.
   (a) Écrire un programme python qui calcule et renvoie la liste $L = [u_0, u_1, \dots, u_{100}]$.

   Dans les deux questions qui suivent, nous cherchons à déterminer une valeur approchée de α. Deux méthodes sont proposées. *On suppose que numpy a déjà été chargé avec l'alias np.*

   (b) Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il détermine une valeur approchée de α à 10^{-3} près par la méthode de la dichotomie. On sait que $\alpha \in [1, \mathrm{e}]$, donc on part de l'intervalle $[a, b] = [1, \mathrm{e}]$.

```
# définition de la fonction g
def g(x):
    return ...

# dichotomie
a = 1
b = np.e
while b-a ... :
    m = ...
    if ... :
        (a,b) = (a,m)
    else:
        (a,b) = (m,b)
print(a)
```

   (c) Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il détermine, à l'aide de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la question 13, une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

```
n = 0
u = 1
while (np.e-1)/2**n ... :
    u = ...
    n = ...
print(...)
```