

COLLE 22 - Semaine du 28/04 au 02/05

La colle débutera par une question de cours et un exercice de cours (voir page 2).

Chapitre 21 - Application de la dérivation

- Inégalité des accroissements finis et application à l'étude de suites
- (Révisions) Lien entre monotonie et signe de la dérivée
- Notion d'extremum local et lien avec le signe de la dérivée
- Notion de convexité/concavité : définition à partir des cordes, caractérisation avec le signe de la dérivée seconde, caractérisation avec les tangentes

Chapitre 22 - Probabilité sur un univers infini

Ce chapitre consiste à généraliser toutes les notions vues dans le Chapitre "Probabilité sur un univers fini" au cas d'un univers infini.

- Notion d'univers, d'évènements, système complets d'évènements, opérations sur les évènements. Nouveauté : union/intersection d'un nombre infini d'évènements.
- Notion de probabilité, de probabilité conditionnelle
- Formule des probabilités totales, des probabilités composées, de Bayes
- Notion d'indépendance

Informatique

- Calculs simples en python : +, -, *, /, **
- Notion de variable. Afficher une valeur avec print.
- Maîtriser la notion d'instruction conditionnelle
- Savoir définir une fonction
- Comprendre une boucle for.
- Comprendre une boucle while.
- Savoir tracer le graphe d'une fonction ou d'une suite à l'aide de matplotlib
- Savoir simuler les lois usuelles

Questions de cours & exercices de cours

Une question de cours et un exercice de cours seront demandés parmi les suivants. La question de cours sera notée sur cinq points, et de même pour l'exercice de cours, soit un total de **10 points** (sur les 20 au total). Néanmoins, tout énoncé du cours pourra faire l'objet d'une question de cours, à tout moment de la colle.

Un énoncé :

- Énoncer l'inégalité des accroissements finis (v_1 ou v_2) (Chap 21 - Proposition 1.1)
- Donner la caractérisation de la convexité (Chap 21 - Proposition 3.1)

- Propriété de σ -additivité d'une probabilité (Chap 22 - Définition 1.10, Point 3)
- Formule des probabilités totales (univers infini) (Chap 22 - Proposition 2.4)

Un exercice :

- Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que,

$$\forall a, b \in]-\infty, -1], \quad 0 \leq e^b - e^a \leq \frac{1}{e}(b - a)$$

(Chap. 21 - Exemple 1.3)

- On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{e^x}{1+x}$$

Dresser le tableau de variations de la fonction f . En déduire l'allure de la courbe de f . (Chap. 21 - Exemple 1.7)

- Soit f la fonction donnée par

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \exp(x)$$

Montrer que la fonction f est convexe sur \mathbb{R} et en déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) \geq x + 1$$

(Chap. 21 - Exemple 3.3, Questions 1 et 4)

- On dispose d'une grille infinie dont les lignes et les colonnes sont numérotées 1, 2, ... On place un jeton au hasard dans une case et on note, pour tout i et j dans \mathbb{N}^* , $A_{i,j}$ "le jeton est placé en ligne i et en colonne j ". On suppose que

$$\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad P(A_{i,j}) = \frac{1}{e^{2j}(i-1)!}$$

Calculer la probabilité de l'évènement L_1 "le jeton est placé sur la ligne 1". (Chap. 22 - Exemple 1.11, Question 1)

- On dispose d'une pièce de monnaie donnant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$. On lance la pièce de monnaie jusqu'à obtenir Pile. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n "Le n -ième lancer donne Face" et A_n "Le premier Pile apparaît au n -ième lancer".
 1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_n)$.
 2. Montrer que la série $\sum P(A_n)$ converge et que sa somme vaut 1.

(Chap. 22 - Exemple 2.5, Questions 1 et 2)

- On considère une urne contenant 5 boules rouges (numérotées 1,2,3,4,5) et 4 boules jaunes (numérotées 6,7,8,9). On réalise 8 tirages avec remise dans cette urne. On note
 - Pour tout $k \in \{1, \dots, 8\}$, X_k la variable aléatoire donnant le numéro obtenu au k -ième tirage.
 - R la variable aléatoire égale au nombre total de boules rouges obtenues.
 - J la variable aléatoire égale au nombre total de boules jaunes obtenues.
 1. Réaliser une simulation de X_1 à l'aide de Python.
 2. Réaliser une simulation de R à l'aide de Python.
 3. Réaliser une simulation de J à l'aide de Python.

(TP 06 - Exercice 2)